مذكرة

الجبر والهندسة الفراغية

للصف الثالث الثانوي



إعداد

أ/ نـاصر أبـوزيـد

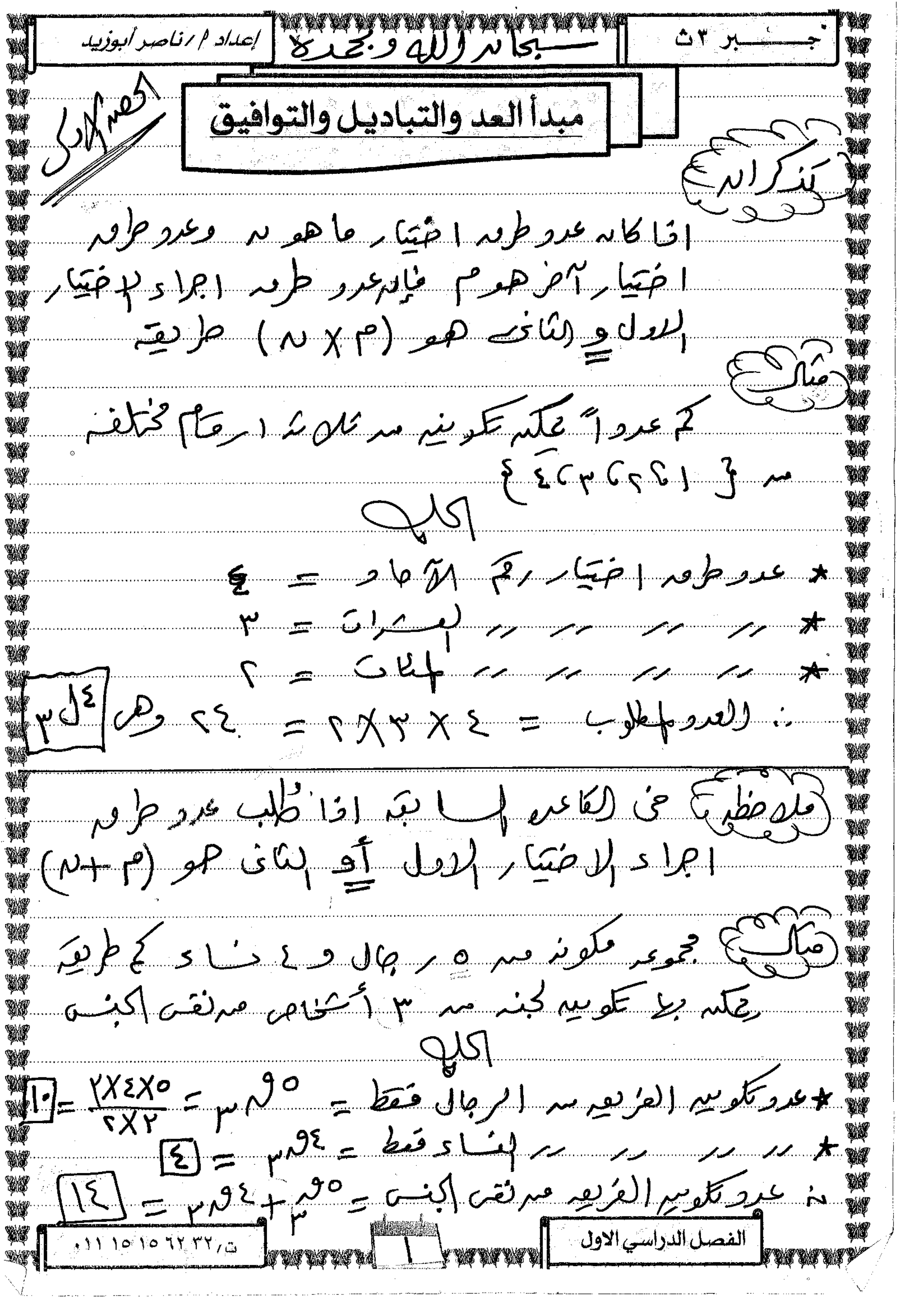
010 00 16 42 44

011 15 15 62 36

011 28 53 40 41

010 61 900 901

مكتبة النخبة بترسا



مبدأ العد والتباديل والتوافيق

الفصل الأول

تذكر أن

إذا كان عدد طرق اختيار ما هو ن وعدد طرق اختيار آخر هو م فإن عدد طرق إجراء الاختيار الأول و الثاني هو (م × ن) طريقة

مثال

كم عدداً يمكن تكوينه من ثلاثة أرقام مختلفة من {١، ٢، ٣، ٤}

الحل

* عدد طرق اختيار رقم الآحاد = ٤
* // // // العشرات = ٣
* // // // المئات = ٢

∴ العدد المطلوب = ٤ × ٣ × ٢ = ٢٤ وهو ٤ل٣

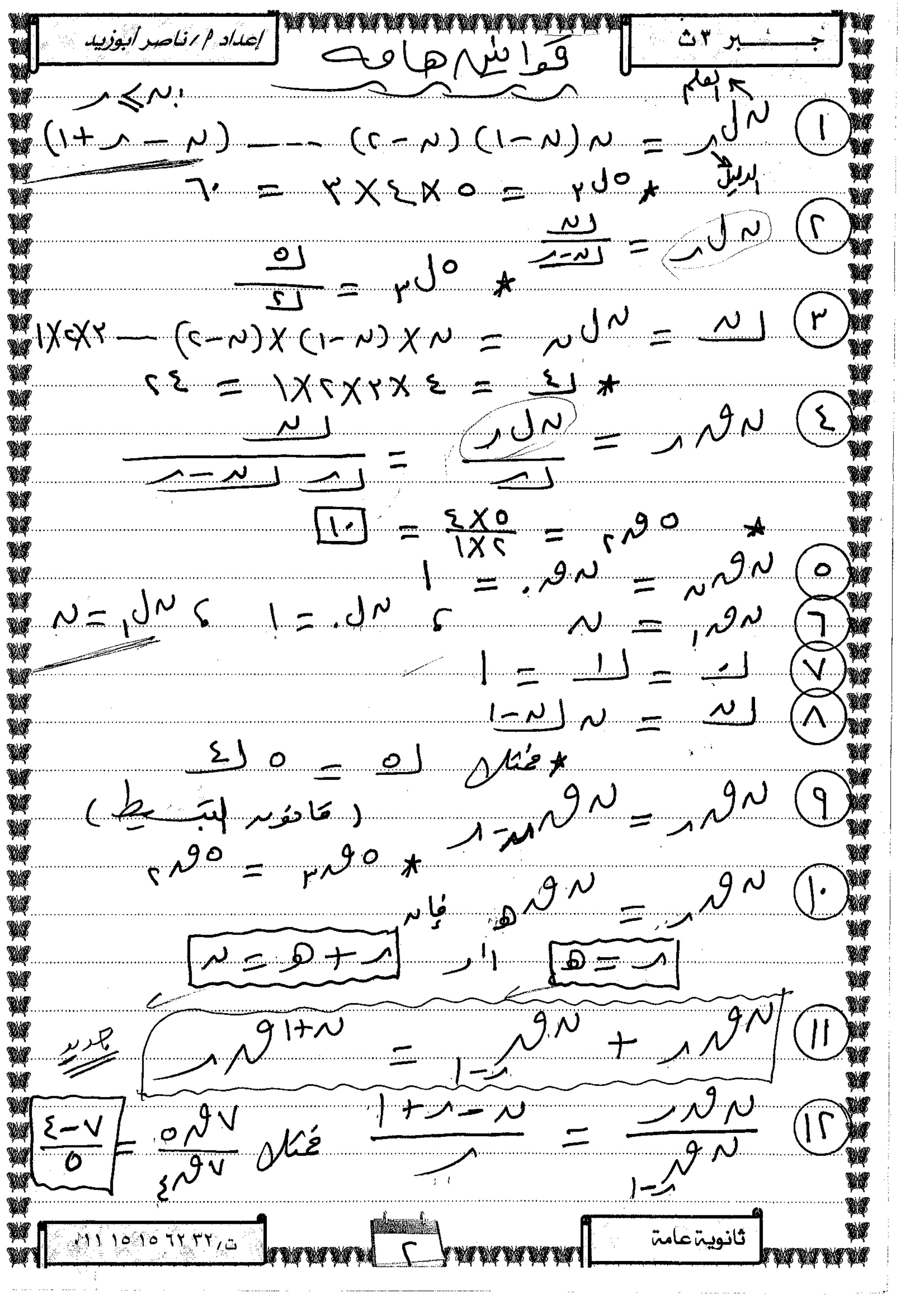
ملاحظة في القاعدة السابقة إذا طُلب عدد طرق إجراء الاختيار الأول أو الثاني هو (م + ن)

مثال مجموعة مكونة من ٥ رجال و ٤ نساء كم طريقة يمكن بها تكوين لجنة من ٣ أشخاص من نفس الجنس

الحل

* عدد تكوين الطرق من الرجال فقط = ٥ق٣ = $\frac{٥ × ٤ × ٣}{٣ × ٢}$ = ١٠
* // // // النساء فقط = ٤ق٣ = ٤

∴ عدد تكوين الطرق من نفس الجنس = ٥ق٣ + ٤ق٣ = ١٤



قوانين هامة

إعداد م/ ناصر أبوزيد

(١) ن ل ر = ن (ن − ١) (ن − ٢) ــــ (ن − ر + ١) ، ن ≥ ر

* ٥ل٣ = ٥ × ٤ × ٣ = ٦٠

(٢) ن ل ر = ⌊ن / ⌊ن−ر

* ٥ل٣ = ⌊٥ / ⌊٢

(٣) ⌊ن = ن ل ن = ن × (ن − ١) × (ن − ٢) ــــ ٢ × ١

* ⌊٤ = ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٢٤

(٤) ن ق ر = ن ل ر / ⌊ر = ⌊ن / (⌊ر ⌊ن−ر)

* ٥ق٢ = (٥ × ٤) / (٢ × ١) = [١٠]

(٥) ن ق ن = ن ق . = ١

(٦) ن ق ١ = ن ، ن ل . = ١ ، ن ل ١ = ن

(٧) ⌊. = ⌊١ = ١

(٨) ⌊ن = ن ⌊ن−١

* مثال ⌊٥ = ٥ ⌊٤

(٩) ن ق ر = ن ق ن−ر (قاعدة التبسيط)

* ٥ق٣ = ٥ق٢

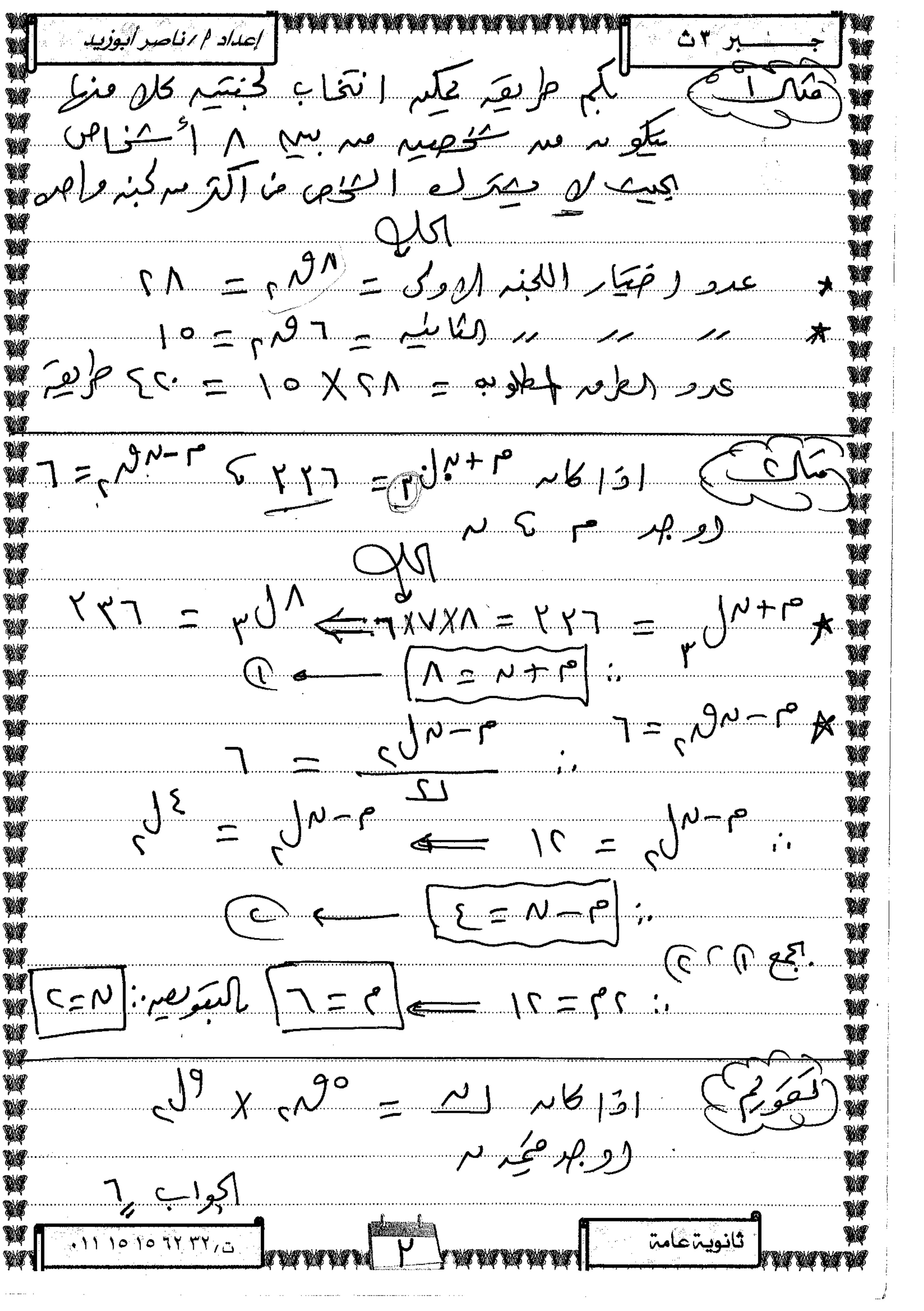
(١٠) ن ق ر = ن ق هـ فإن [ر = هـ] أو [ر + هـ = ن]

(١١) جديد: ن ق ر + ن ق ر−١ = ن+١ ق ر

(١٢) ن ق ر / ن ق ر−١ = (ن − ر + ١) / ر

مثال ٧ق٥ / ٧ق٤ = (٧ − ٤) / ٥

ت/ ٠١١١٥١٥٦٢٣٢



مثال ١

بكم طريقة يمكن انتخاب لجنتين كلا منها تتكون من شخصين من بين ٨ أشخاص بحيث لا يشترك الشخص في أكثر من لجنة واحدة

الحل

* عدد اختيار اللجنة الأولى = $^{٨}ق_{٢}$ = ٢٨
* " " " الثانية = $^{٦}ق_{٢}$ = ١٥

عدد الطرق المطلوبة = ٢٨ × ١٥ = ٤٢٠ طريقة

مثال ٢

إذا كان $^{م+ن}ل_{٣}$ = ٣٣٦ ، $^{م-ن}ق_{٢}$ = ٦

أوجد م ، ن

الحل

* $^{م+ن}ل_{٣}$ = ٣٣٦ = ٨ × ٧ × ٦ ⟸ $^{٨}ل_{٣}$ = ٣٣٦

∴ م + ن = ٨ ← (١)

* $^{م-ن}ق_{٢}$ = ٦

∴ $\frac{^{م-ن}ل_{٢}}{٢!}$ = ٦

∴ $^{م-ن}ل_{٢}$ = ١٢ ⟸ $^{م-ن}ل_{٢}$ = $^{٤}ل_{٢}$

∴ م − ن = ٤ ← (٢)

بجمع ١ ، ٢

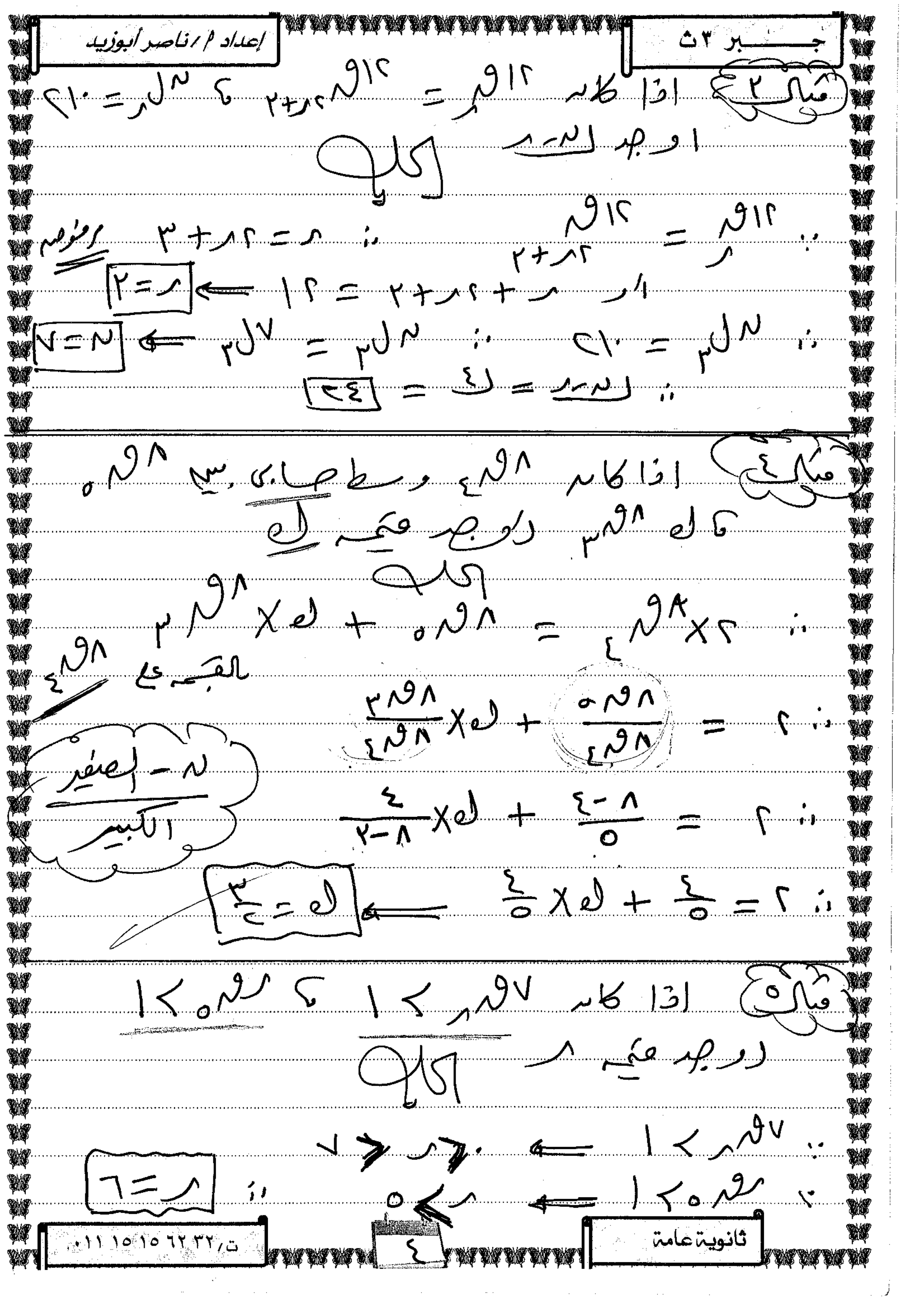
∴ ٢م = ١٢ ⟸ م = ٦ بالتعويض: ن = ٢

تقويم

إذا كان ن! = $^{٥}ق_{٢}$ × $^{٩}ل_{٢}$

أوجد قيمة ن

الجواب ن = ٦



مثال ٢ اذا كان $^{١٢}ق_ر = {}^{١٢}ق_{٢ر+٢}$ ، $^نل_ر = ٢١٠$

اوجد $\underline{ل_ر ر}$

الحل

∵ $^{١٢}ق_ر = {}^{١٢}ق_{٢ر+٢}$ ∴ $ر = ٢ر + ٣$ (مرفوض)

أو $ر + ٢ر + ٢ = ١٢$ ⟸ $\boxed{ر = ٢}$

∵ $^نل_٣ = ٢١٠$ ∴ $^نل_٣ = {}^٧ل_٣$ ⟸ $\boxed{ن = ٧}$

∴ $\underline{ل_ر ر} = \underline{٤} = \boxed{٢٤}$

مثال ٤ اذا كان $^٨ق_٤$ وسط حسابي بين $^٨ق_٥$ ، ك $^٨ق_٣$ اوجد قيمة ك

الحل

∴ $٢ \times {}^٨ق_٤ = {}^٨ق_٥ + ك \times {}^٨ق_٣$

بالقسمة على $^٨ق_٤$

∴ $٢ = \frac{^٨ق_٥}{^٨ق_٤} + ك \times \frac{^٨ق_٣}{^٨ق_٤}$

$\frac{ن - الصغير}{الكبير}$

∴ $٢ = \frac{٨-٤}{٥} + ك \times \frac{٤}{٨-٢}$

∴ $٢ = \frac{٤}{٥} + ك \times \frac{٤}{٥}$ ⟸ $\boxed{ك = \frac{٣}{٢}}$

مثال ٥ اذا كان $^٧ق_ر > ١$ ، $^رق_٥ > ١$

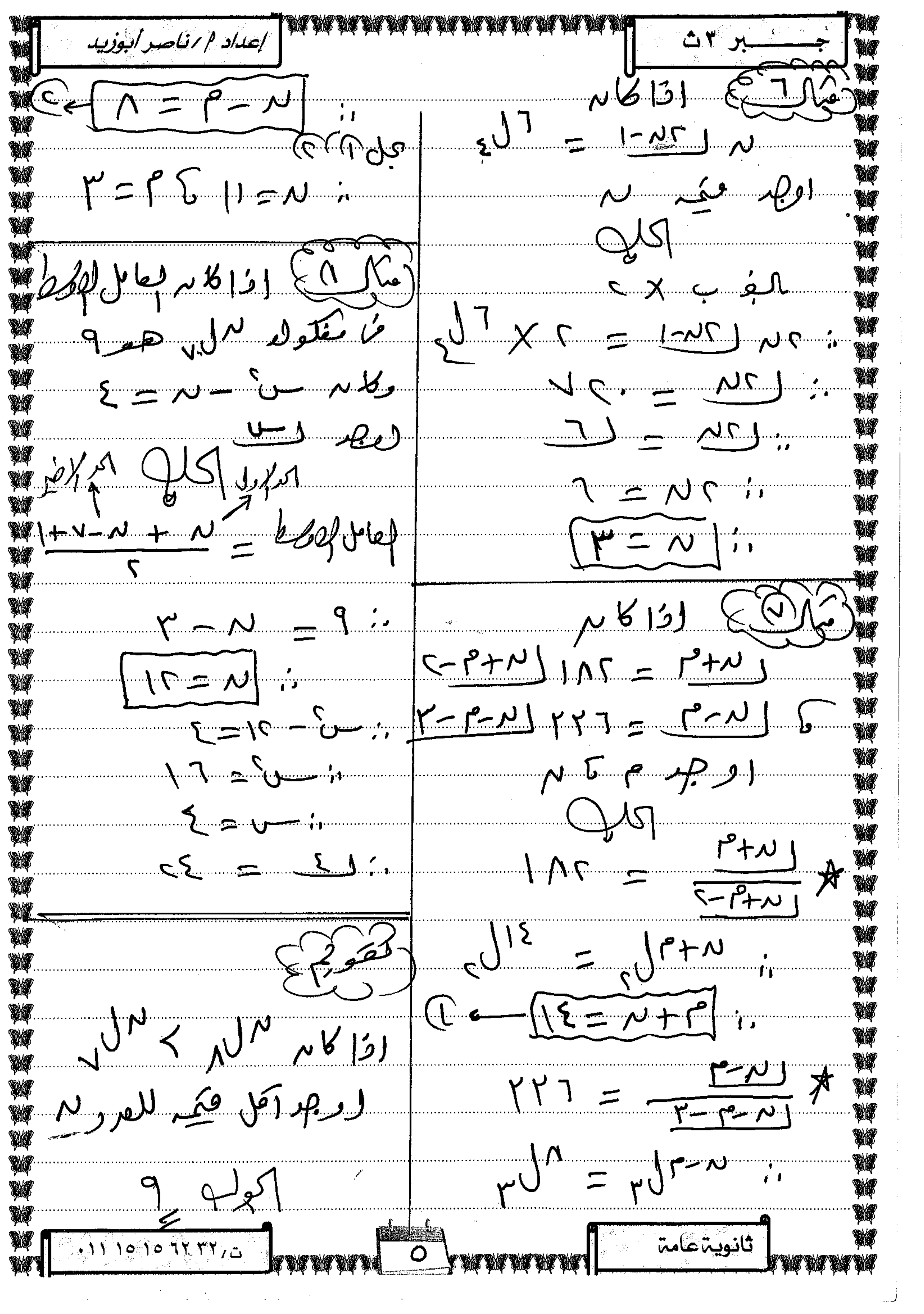
اوجد قيمة ر

الحل

∵ $^٧ق_ر > ١$ ⟸ $ر \ngtr ٧$

∵ $^رق_٥ > ١$ ⟸ $ر > ٥$

∴ $\boxed{ر = ٦}$



مثال ٦ إذا كان

ن ⌊٢ن−١ = ٦ل٤

أوجد قيمة ن

الحل

بالضرب × ٢

∴ ٢ن ⌊٢ن−١ = ٢ × ٦ل٤

∴ ⌊٢ن = ٧٢٠

∴ ⌊٢ن = ⌊٦

∴ ٢ن = ٦

∴ ن = ٣

مثال ٧ إذا كان

⌊ن+م ÷ ⌊ن+م−٢ = ١٨٢

، ⌊ن−م ÷ ⌊ن−م−٣ = ٣٣٦

أوجد م ، ن

الحل

★ ⌊ن+م / ⌊ن+م−٢ = ١٨٢

∴ ن+مل٢ = ١٤ل٢

∴ م + ن = ١٤ ⟵ (١)

★ ⌊ن−م / ⌊ن−م−٣ = ٣٣٦

∴ ن−مل٣ = ٨ل٣

∴ ن − م = ٨ ⟵ (٢)

بجمع ١ ، ٢

∴ ن = ١١ ، م = ٣

مثال ٨ إذا كان الحد الأوسط في مفكوك ^نل٧ هو ٩

وكان س² − ن = ٤

أوجد ⌊س

الحل

الحد الأوسط = (ن + ن−٧+١) ÷ ٢   (الحد الأول ، الحد الأخير)

∴ ٩ = ن − ٣

∴ ن = ١٢

∴ س² − ١٢ = ٤

∴ س² = ١٦

∴ س = ٤

∴ ⌊٤ = ٢٤

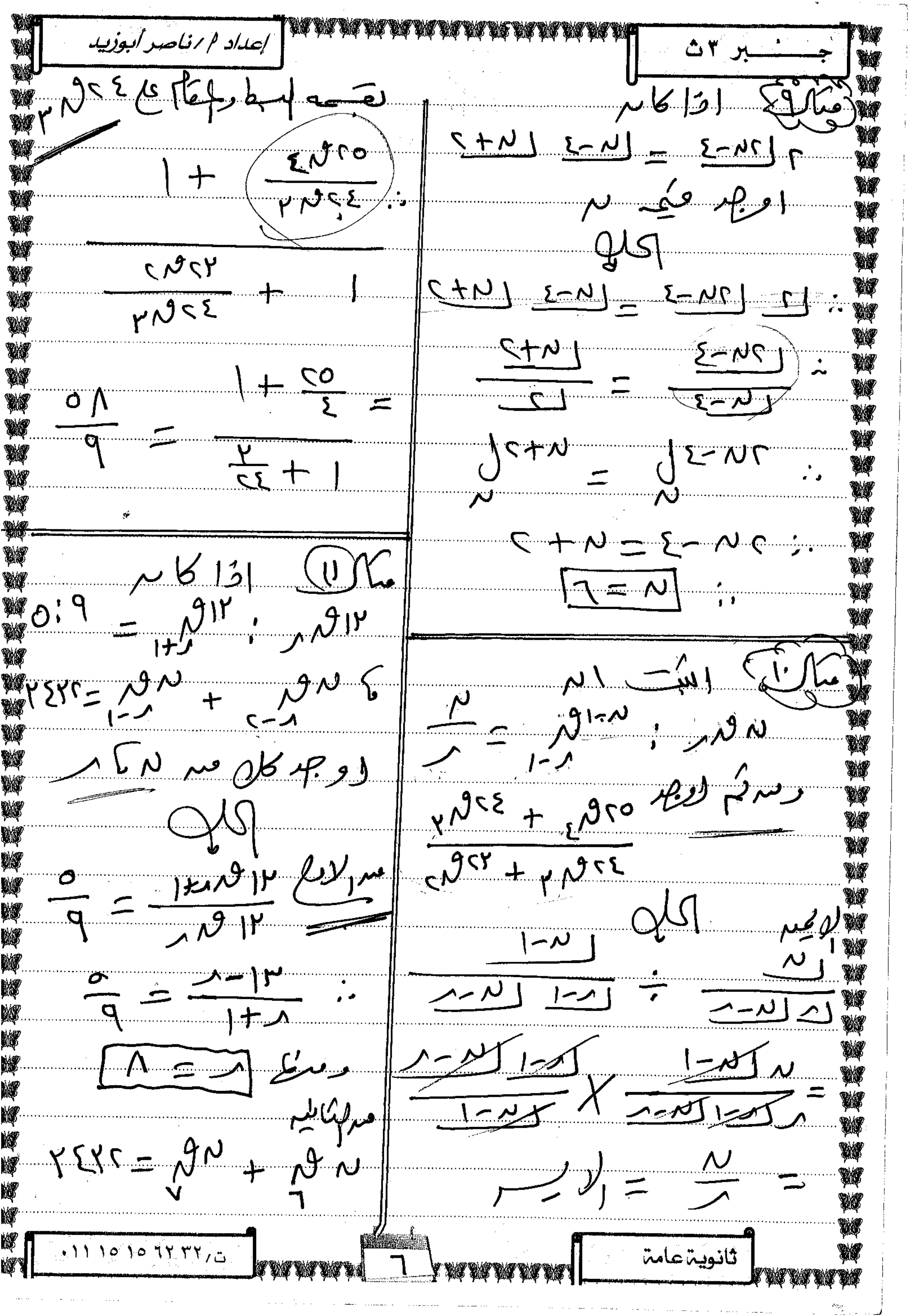
تقويم

إذا كان ^نل٨ > ^نل٧

أوجد أقل قيمة للعدد ن

الحل ٩

ت/ ٠١١١٥١٥٦٢٣٢



مثال ⑨ إذا كان

٢ ⌊٢ن−٤ = ⌊ن−٤ ⌊ن+٢ أوجد قيمة ن

الحل

∵ ٢ ⌊٢ن−٤ = ⌊ن−٤ ⌊ن+٢

∴ ⌊٢ن−٤ / ⌊ن−٤ = ⌊ن+٢ / ⌊٢

∴ ٢ن−٤ ل ن = ن+٢ ل ن

∴ ٢ن − ٤ = ن + ٢

∴ ن = ٦

مثال ١٠ أثبت أن

ن ق ر = (ن / ر) × ن−١ ق ر−١

ومن ثم أوجد

(٢٥ق٤ + ٢٤ق٣) / (٢٤ق٣ + ٢٢ق٢)

الحل

الأيمن = ⌊ن / (⌊ر ⌊ن−ر) ÷ ⌊ن−١ / (⌊ر−١ ⌊ن−ر)

= ن ⌊ن−١ / (ر ⌊ر−١ ⌊ن−ر) × (⌊ر−١ ⌊ن−ر) / ⌊ن−١

= ن / ر = الأيسر

∴ نقسم البسط والمقام على ٢٤ق٣

(٢٥ق٤ / ٢٤ق٣ + ١) / (٢٢ق٢ / ٢٤ق٣ + ١)

= (٢٥/٤ + ١) / (٢/٢٤ + ١) = ٥٨ / ٩

مثال ⑪ إذا كان

١٢ق ر : ١٢ق ر+١ = ٩ : ٥ ، ن ق ر−٢ + ن ق ر−١ = ٢٤٢٢

أوجد كل من ن ، ر

الحل

من الأولى

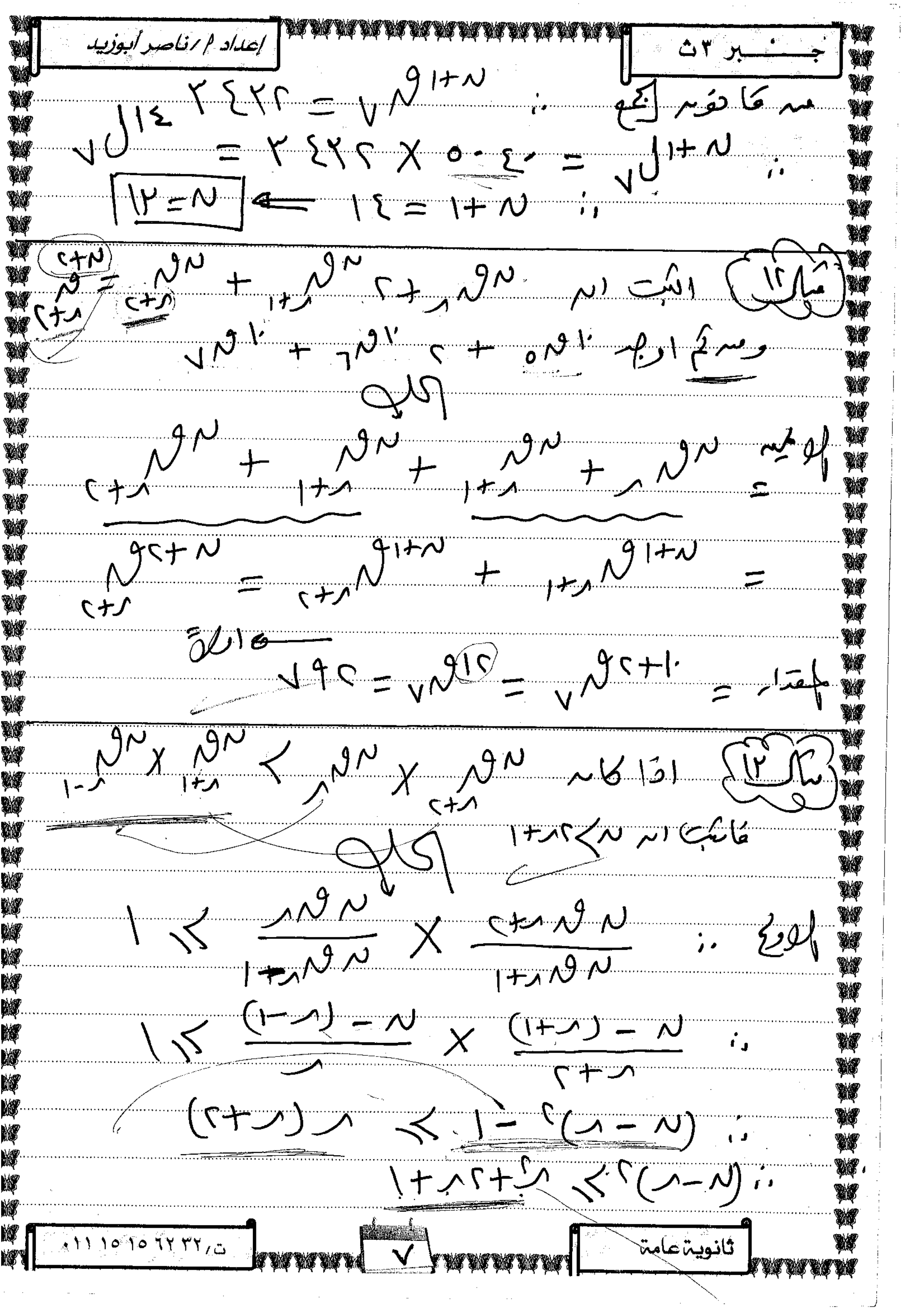
١٢ق ر+١ / ١٢ق ر = ٥ / ٩

∴ (١٣ − ر) / (ر + ١) = ٥ / ٩

ومنها ر = ٨

من الثانية

ن ق٦ + ن ق٧ = ٢٤٢٢



من قانون الجمع ∴ $^{ن+١}ق_{٧} = ٣٤٣٢$ ، $^{١٤}ل_{٧}$

∴ $^{ن+١}ل_{٧} = ٥٠٤٠ \times ٣٤٣٢ = {}^{١٤}ل_{٧}$

∴ $ن + ١ = ١٤ \Leftarrow$ $\boxed{ن = ١٣}$

مثال ١٢ اثبت ان $^{ن}ق_{ر} + ٢\,^{ن}ق_{ر+١} + {}^{ن}ق_{ر+٢} = {}^{ن+٢}ق_{ر+٢}$

ومن ثم اوجد $^{١٠}ق_{٥} + ٢\,^{١٠}ق_{٦} + {}^{١٠}ق_{٧}$

الحل

الأيمن $= {}^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر+١} + {}^{ن}ق_{ر+١} + {}^{ن}ق_{ر+٢}$

$= {}^{ن+١}ق_{ر+١} + {}^{ن+١}ق_{ر+٢} = {}^{ن+٢}ق_{ر+٢}$

المقدار $= {}^{١٠+٢}ق_{٧} = {}^{١٢}ق_{٧} = ٧٩٢$

مثال ١٣ اذا كان $^{ن}ق_{ر+٢} \times {}^{ن}ق_{ر} < {}^{ن}ق_{ر+١} \times {}^{ن}ق_{ر-١}$

فاثبت ان $ن > ٢ر + ١$

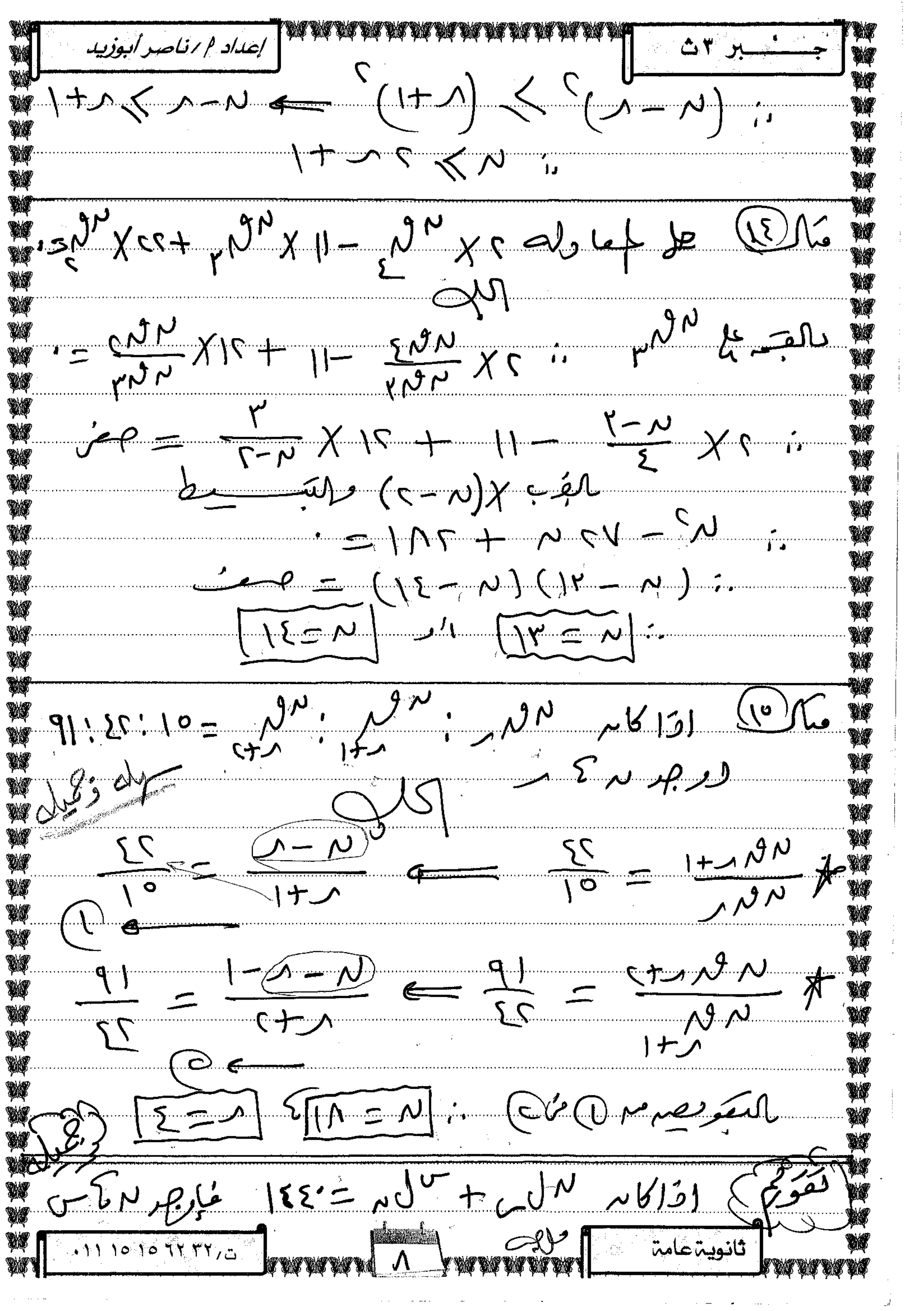
الحل

∵ $\frac{^{ن}ق_{ر+٢}}{^{ن}ق_{ر+١}} \times \frac{^{ن}ق_{ر}}{^{ن}ق_{ر-١}} < ١$

∴ $\frac{ن - (ر+١)}{ر+٢} \times \frac{ن - (ر-١)}{ر} < ١$

∴ $(ن - ر)^{٢} - ١ < ر(ر+٢)$

∴ $(ن - ر)^{٢} < ر^{٢} + ٢ر + ١$



∵ $(ن-ر)^2 \geq (ر+1)^2$ ⟵ $ن - ر \geq ر + 1$

∴ $ن \geq 2ر + 1$

مثال (١٤) حل المعادلة $2 \times {}^{ن}ق_{4} - 11 \times {}^{ن}ق_{3} + 12 \times {}^{ن}ق_{2} = 0$

الحل

بالقسمة على ${}^{ن}ق_{3}$ ∴ $2 \times \frac{{}^{ن}ق_{4}}{{}^{ن}ق_{3}} - 11 + 12 \times \frac{{}^{ن}ق_{2}}{{}^{ن}ق_{3}} = 0$

∴ $2 \times \frac{ن-3}{4} - 11 + 12 \times \frac{3}{ن-2} =$ صفر

بالضرب × (ن − ٢) والتبسيط

∴ $ن^2 - 27ن + 182 = 0$

∴ (ن − ١٣)(ن − ١٤) = صفر

∴ $ن = 13$ أو $ن = 14$

مثال (١٥) إذا كان ${}^{ن}ق_{ر} : {}^{ن}ق_{ر+1} : {}^{ن}ق_{ر+2} = 15 : 42 : 91$
أوجد ن ، ر

سهلة وجميلة

الحل

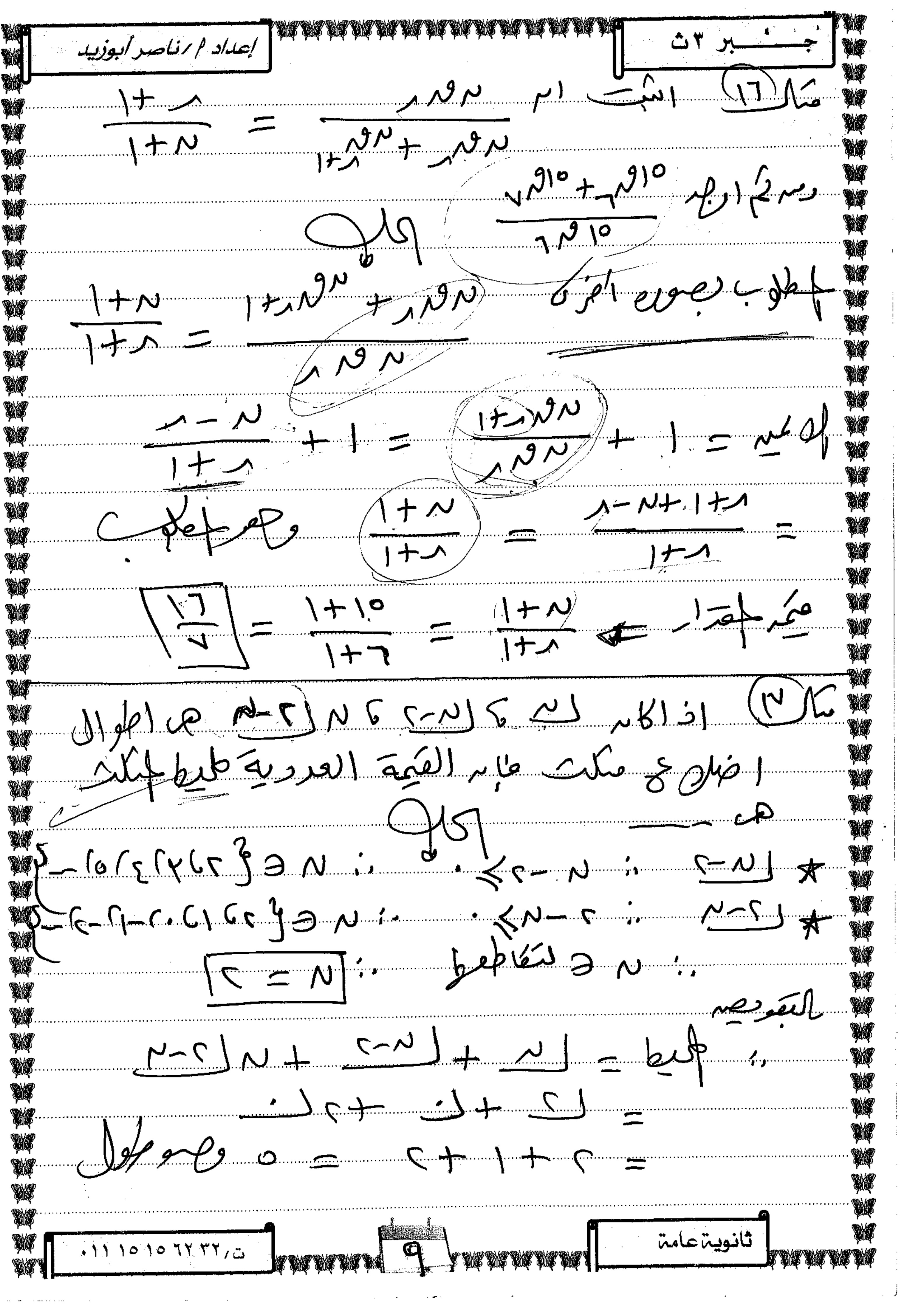
* $\frac{{}^{ن}ق_{ر+1}}{{}^{ن}ق_{ر}} = \frac{42}{15}$ ⟸ $\frac{ن-ر}{ر+1} = \frac{42}{15}$ ⟵ (١)

* $\frac{{}^{ن}ق_{ر+2}}{{}^{ن}ق_{ر+1}} = \frac{91}{42}$ ⟸ $\frac{ن-ر-1}{ر+2} = \frac{91}{42}$ ⟵ (٢)

بالتعويض من (١) ، (٢) ∴ $ن = 18$ ، $ر = 4$

وجميلة

تقويم: إذا كان ${}^{ن}ل_{س} + {}^{3}ل_{ن} = 1440$ فأوجد ن ، س



مثال (١٦) اثبت أن

$$\frac{ن ق ر}{ن ق ر + ن ق ر+١} = \frac{ر+١}{ن+١}$$

ومن ثم أوجد $\frac{١٥ق٦ + ١٥ق٧}{١٥ق٦}$

الحل

المطلوب بصورة أخرى

$$\frac{ن ق ر + ن ق ر+١}{ن ق ر} = \frac{ن+١}{ر+١}$$

الأيمن $= ١ + \frac{ن ق ر+١}{ن ق ر} = ١ + \frac{ن-ر}{ر+١}$

$$= \frac{ر+١+ن-ر}{ر+١} = \frac{ن+١}{ر+١}$$ وهو المطلوب.

قيمة المقدار $\Leftarrow \frac{ن+١}{ر+١} = \frac{١٥+١}{٦+١} = \boxed{\frac{١٦}{٧}}$

مثال (١٧) إذا كانت ل ن ، ل ن-٢ ، ن ل ٢-ن هي أطوال أضلاع مثلث فإن القيمة العددية لمحيط المثلث هي ـــــــ

الحل

* ل ن-٢ ∴ ن-٢ ≥ ٠ ∴ ن ∈ {٢، ٣، ٤، ٥، ...}
* ل ٢-ن ∴ ٢-ن ≥ ٠ ∴ ن ∈ {٢، ١، ٠، -١، -٢، ...}

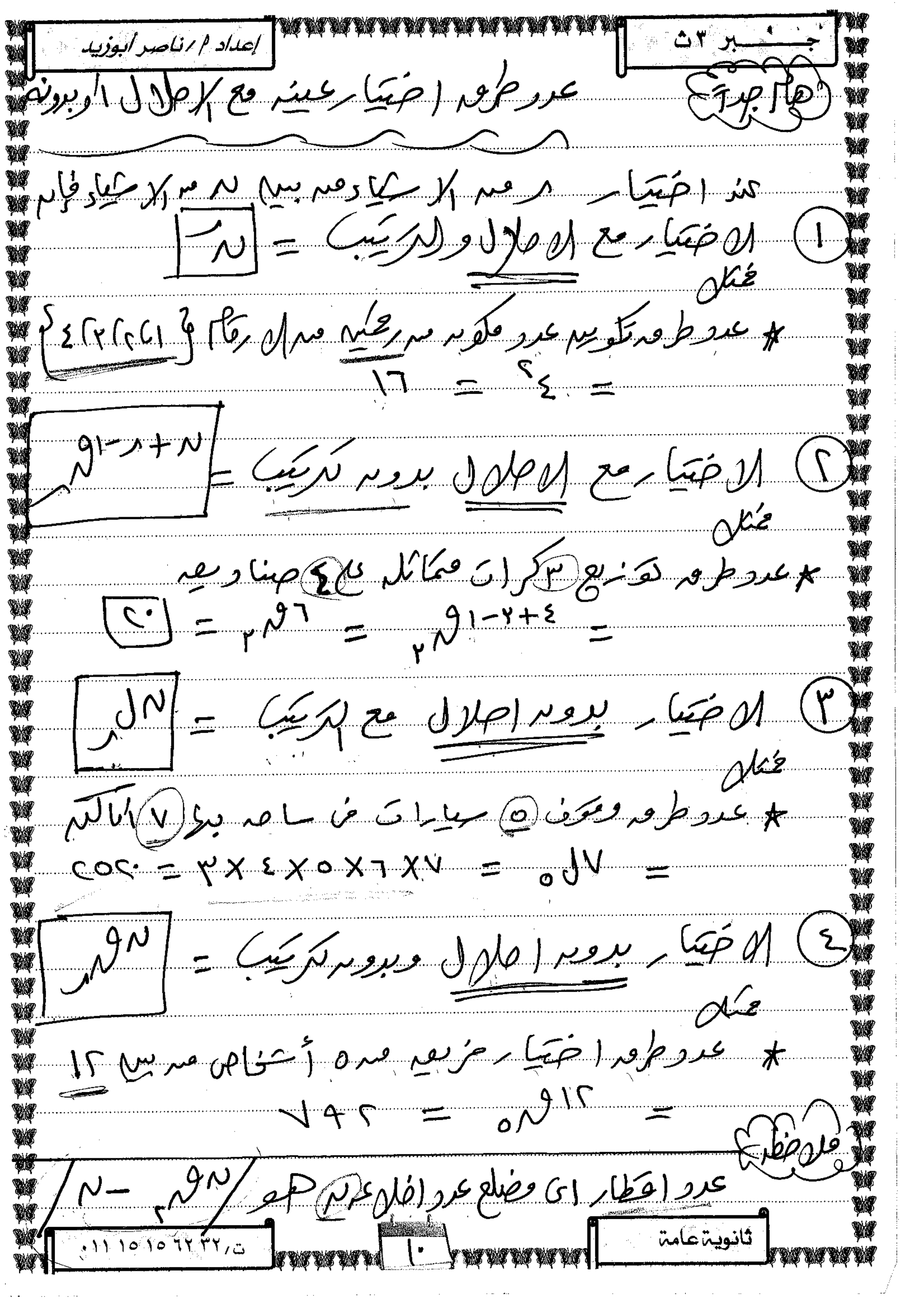
∴ ن ∈ التقاطع ∴ $\boxed{ن = ٢}$

بالتعويض

∴ المحيط = ل ن + ل ن-٢ + ن ل ٢-ن

= ل٢ + ل٠ + ٢ل٠

= ٢ + ١ + ٢ = ٥ وهو المطلوب



هام جداً

عدد طرق اختيار عينة مع الإحلال أو بدونه

عند اختيار ر من الأشياء من بين ن من الأشياء فإن

(١) الاختيار مع الإحلال والترتيب = $ن^{ر}$

مثال

* عدد طرق تكوين عدد مكون من رقمين من الأرقام في {١، ٢، ٣، ٤} = $٤^{٢}$ = ١٦

(٢) الاختيار مع الإحلال بدون ترتيب = $^{ن+ر-١}ق_{ر}$

مثال

* عدد طرق توزيع ٣ كرات متماثلة على ٤ صناديق = $^{٤+٣-١}ق_{٣}$ = $^{٦}ق_{٣}$ = ٢٠

(٣) الاختيار بدون إحلال مع الترتيب = $^{ن}ل_{ر}$

مثال

* عدد طرق وقوف ٥ سيارات في ساحة بها ٧ أماكن = $^{٧}ل_{٥}$ = ٧ × ٦ × ٥ × ٤ × ٣ = ٢٥٢٠

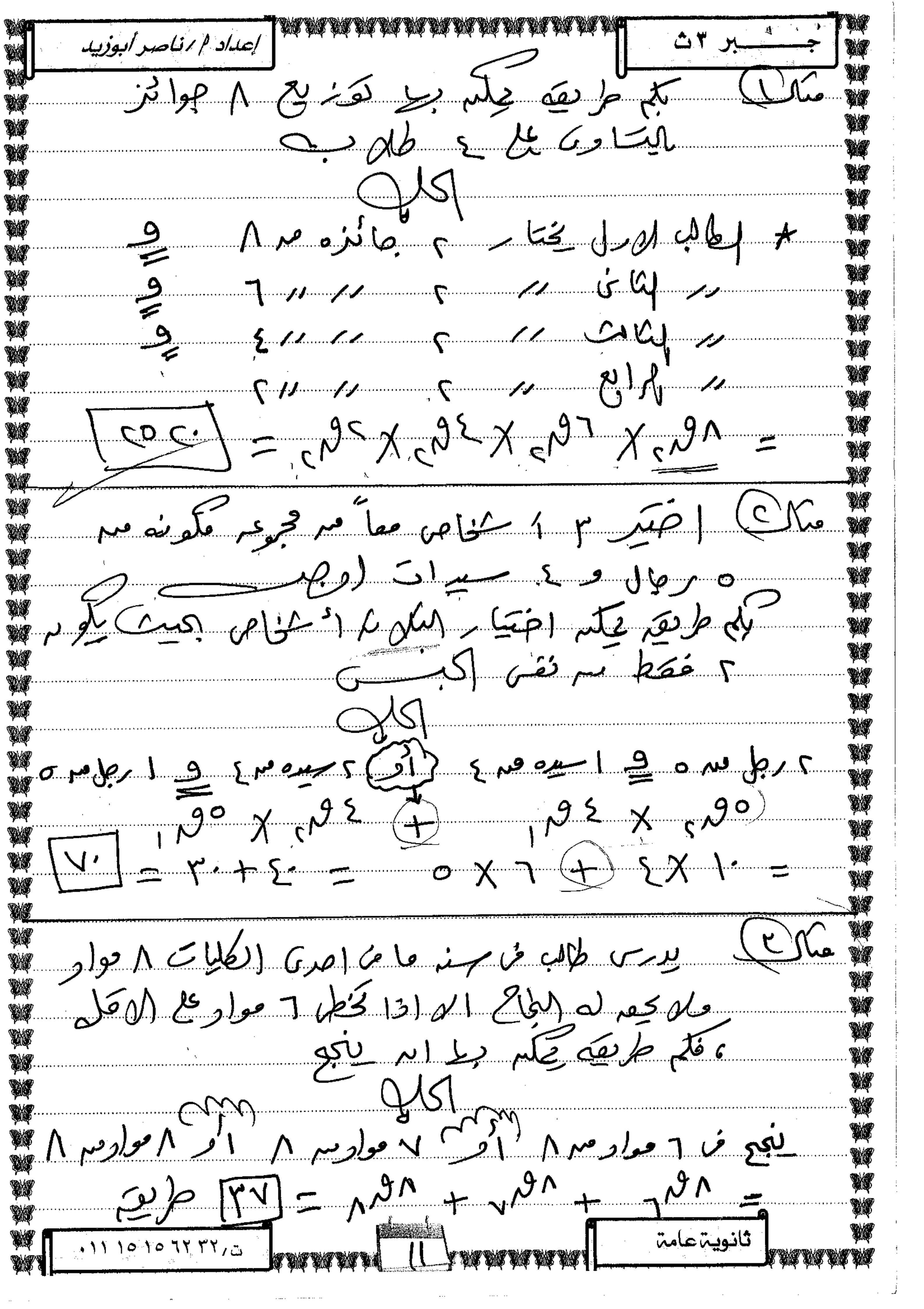
(٤) الاختيار بدون إحلال وبدون ترتيب = $^{ن}ق_{ر}$

مثال

* عدد طرق اختيار لجنة من ٥ أشخاص من بين ١٢ = $^{١٢}ق_{٥}$ = ٧٩٢

ملاحظة

عدد أقطار أي مضلع عدد أضلاعه ن هو $^{ن}ق_{٢}$ − ن



إعداد أ / ناصر أبوزيد

مثال (١) بكم طريقة يمكن بها توزيع ٨ جوائز بالتساوي على ٤ طلاب

الحل

* الطالب الأول يختار ٢ جائزة من ٨ و

" الثاني " ٢ " " ٦ و

" الثالث " ٢ " " ٤ و

" الرابع " ٢ " " ٢

$= {}^8C_2 \times {}^6C_2 \times {}^4C_2 \times {}^2C_2 = 2520$

مثال (٢) اختير ٣ أشخاص معاً من مجموعة مكونة من ٥ رجال و ٤ سيدات أوجد بكم طريقة يمكن اختيار الثلاث أشخاص بحيث يكون ٢ فقط من نفس الجنس

الحل

٢ رجل من ٥ و ١ سيدة من ٤ أو ٢ سيدة من ٤ و ١ رجل من ٥

${}^5C_2 \times {}^4C_1 + {}^4C_2 \times {}^5C_1$

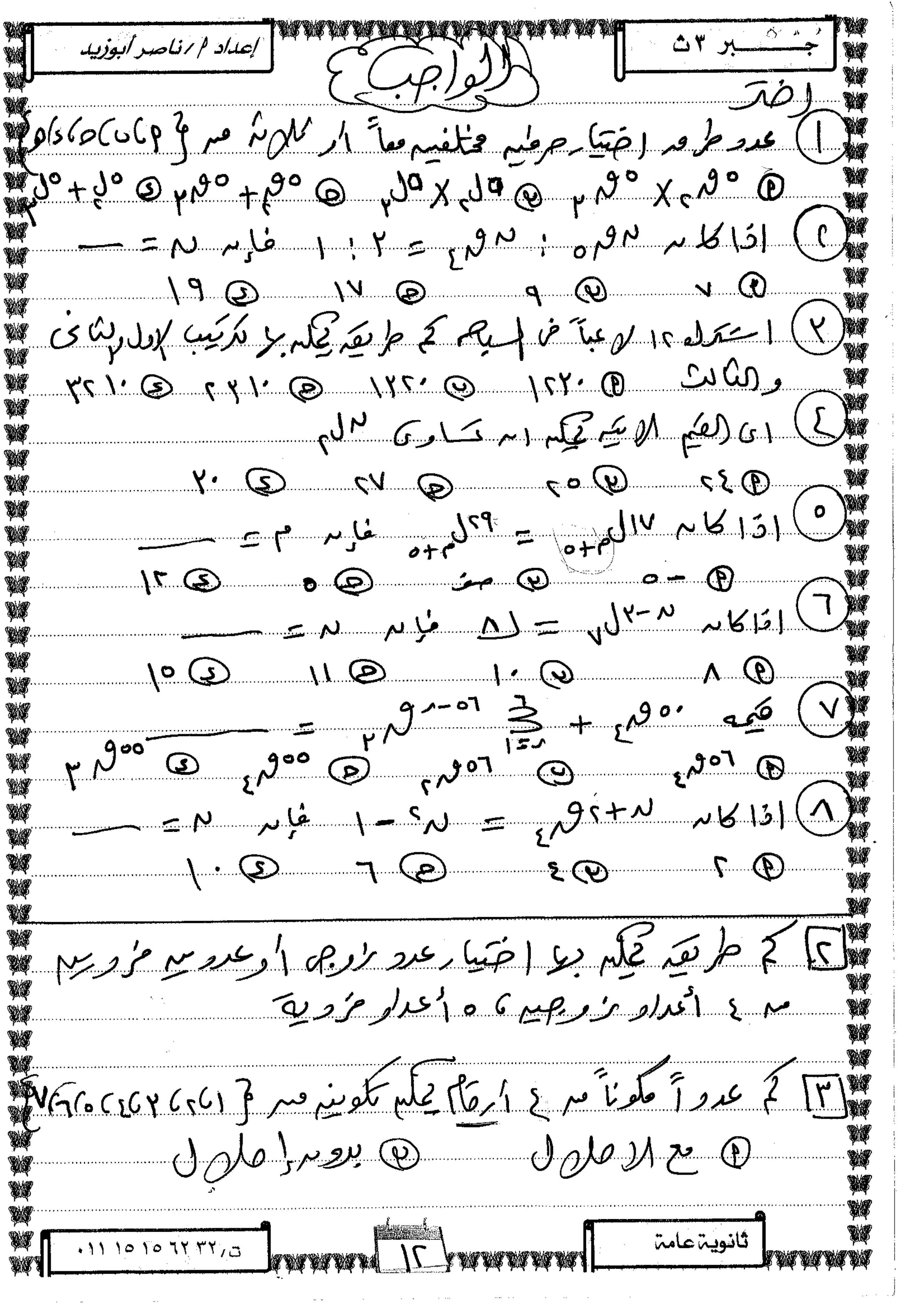
$= 10 \times 4 + 6 \times 5 = 40 + 30 = 70$

مثال (٣) يدرس طالب في سنة ما في إحدى الكليات ٨ مواد ولا يحق له النجاح إلا إذا نجح في ٦ مواد على الأقل، فكم طريقة يمكن بها أن ينجح

الحل

ينجح في ٦ مواد من ٨ أو ٧ مواد من ٨ أو ٨ مواد من ٨

$= {}^8C_6 + {}^8C_7 + {}^8C_8 = 37$ طريقة



إعداد م/ ناصر أبوزيد

الواجب

اختر

١) عدد طرق اختيار حرفين مختلفين معاً أو ثلاثة من {أ، ب، جـ، د، هـ، و}

(أ) $^{5}ق_{2} \times {}^{5}ق_{3}$ (ب) $^{5}ل_{2} \times {}^{5}ل_{3}$ (جـ) $^{5}ق_{2} + {}^{5}ق_{3}$ (د) $^{5}ل_{2} + {}^{5}ل_{3}$

٢) إذا كان $^{ن}ق_{5} : {}^{ن}ق_{4} = 2 : 1$ فإن ن = ___

(أ) ٧ (ب) ٩ (جـ) ١٧ (د) ١٩

٣) اشترك ١٢ لاعباً في السباق كم طريقة يمكن بها ترتيب الأول والثاني والثالث

(أ) ١٣٢٠ (ب) ١٢٢٠ (جـ) ٢٢١٠ (د) ٣٢١٠

٤) أي القيم الآتية يمكن أن تساوي $^{ن}ل_{2}$

(أ) ٢٤ (ب) ٢٥ (جـ) ٢٧ (د) ٢٠

٥) إذا كان $^{17}ل_{م+5} = {}^{29}ل_{م+5}$ فإن م = ___

(أ) -٥ (ب) صفر (جـ) ٥ (د) ١٢

٦) إذا كان $^{ن-2}ل_{7} = 8!$ فإن ن = ___

(أ) ٨ (ب) ١٠ (جـ) ١١ (د) ١٥

٧) قيمة $^{50}ق_{4} + \sum_{ر=1}^{6} {}^{56-ر}ق_{3} = $ ___

(أ) $^{56}ق_{4}$ (ب) $^{56}ق_{3}$ (جـ) $^{55}ق_{4}$ (د) $^{55}ق_{3}$

٨) إذا كان $^{ن+2}ق_{4} = ن^{2} - 1$ فإن ن = ___

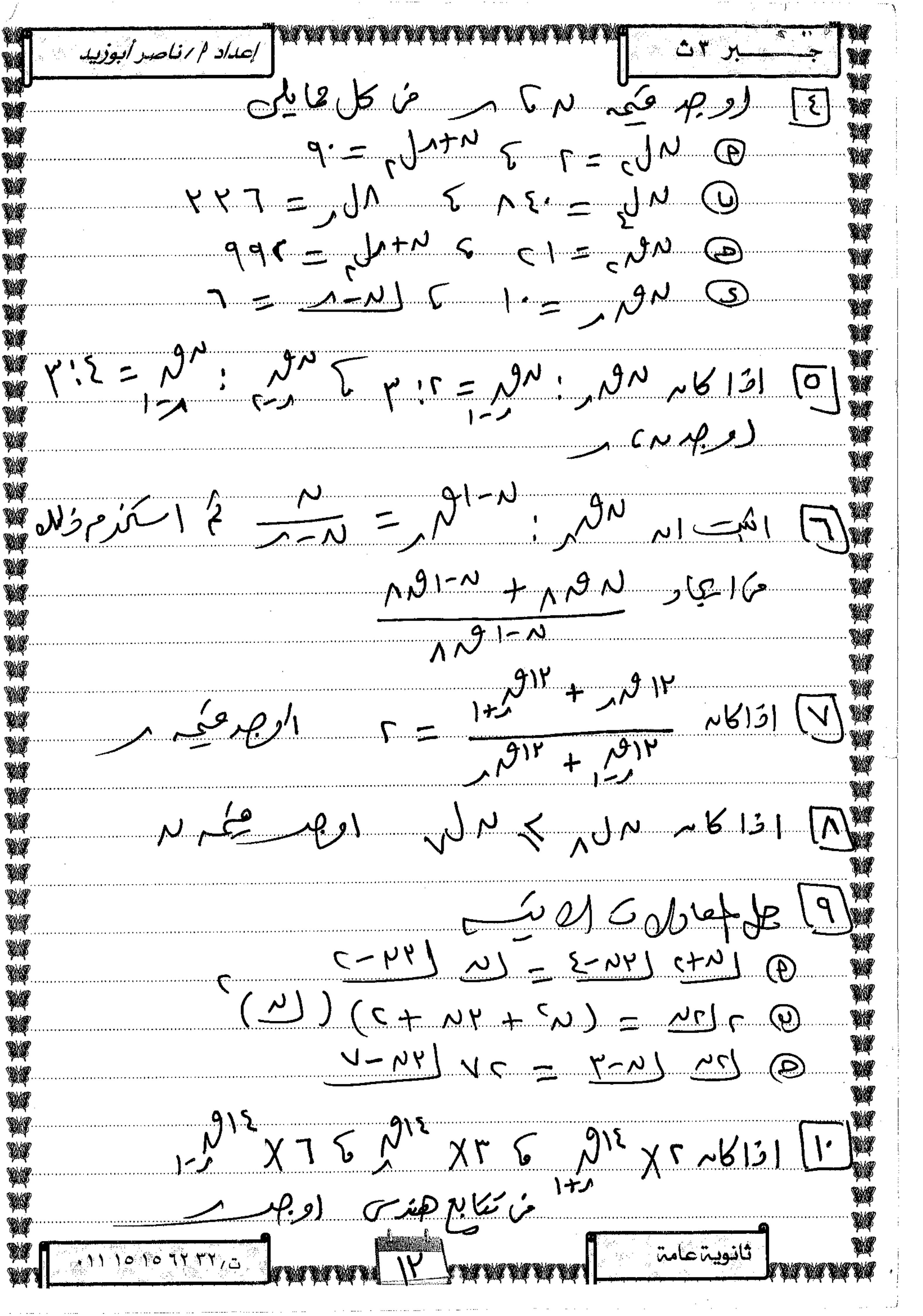
(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ١٠

[٢] كم طريقة يمكن بها اختيار عدد زوجي أو عدد فردي من ٤ أعداد زوجية ، ٥ أعداد فردية

[٣] كم عدداً مكوناً من ٤ أرقام يمكن تكوينه من {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧}

(أ) مع الإحلال (ب) بدون إحلال

ت/ ٠١١١٥١٥٦٢٣٢



إعداد أ/ ناصر أبوزيد

٤) أوجد قيمة ن أو ر من كل مما يلي

أ) ن ل٢ = ٢ ، ن+١ل٢ = ٩٠

ب) ن ل٤ = ٨٤٠ ، ٨ل ر = ٣٣٦

ج) ن ق٢ = ٢١ ، ن+١ل٢ = ٩٩٢

د) ن ق ر = ١٠ ، |ن−ر = ٦

٥) إذا كان ن ق ر : ن ق ر−١ = ٢ : ٣ ، ن ق ر+١ : ن ق ر = ٤ : ٣
أوجد ن ، ر

٦) اثبت أن ن ق ر : ن−١ق ر = ن / (ن−ر) ثم استخدم ذلك
في إيجاد (ن ق ٨ + ن−١ق ٨) / ن−١ق ٨

٧) إذا كان (١٢ق ر + ١٢ق ر+١) / (١٢ق ر + ١٢ق ر−١) = ٢ أوجد قيمة ر

٨) إذا كان ن ل٨ > ن ل٧ أوجد قيم ن

٩) حل المعادلات الآتية

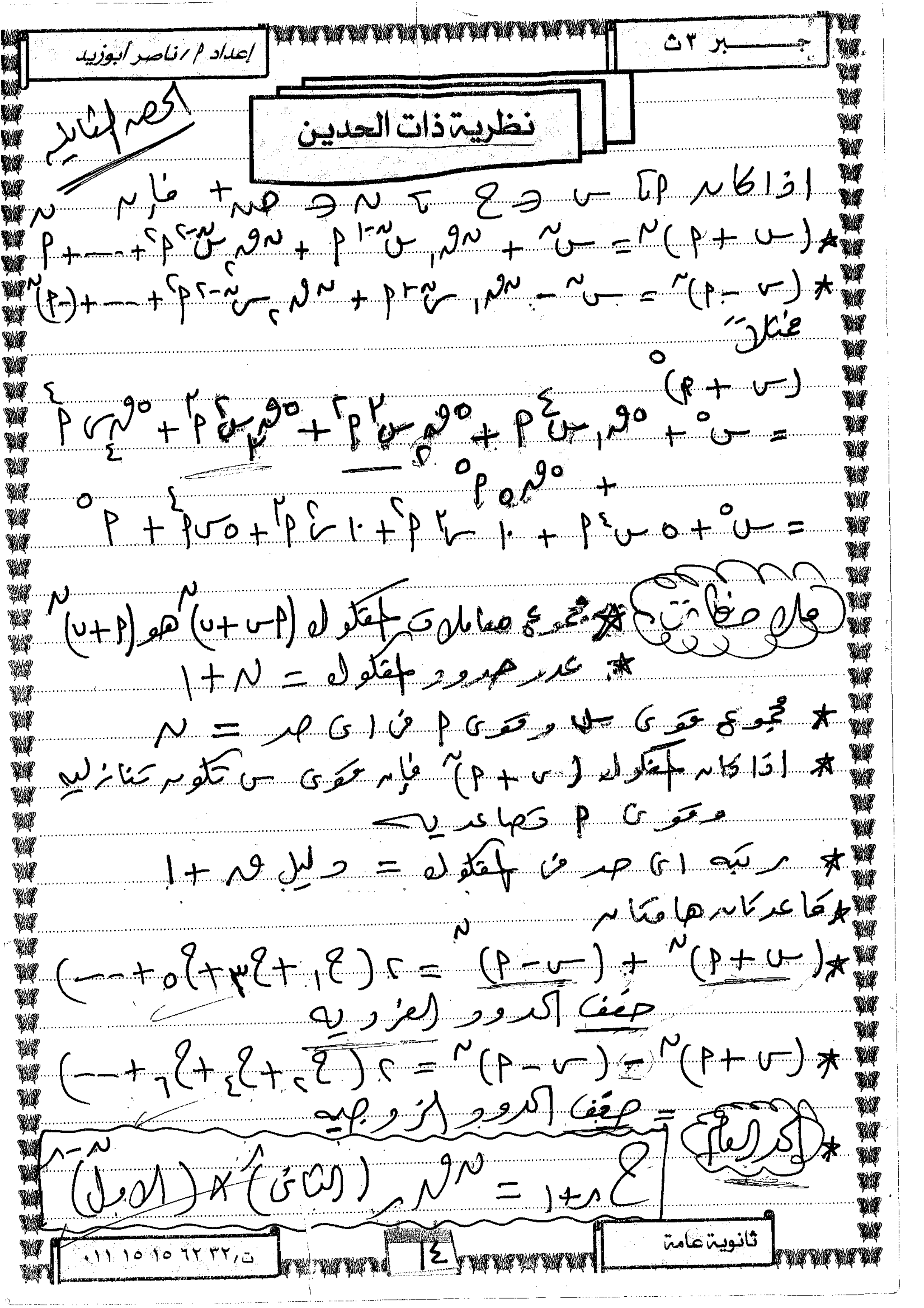
أ) |ن+٢ |٢ن−٤ = ن |٢ن−٢

ب) ٢ |٢ن = (ن² + ٢ن + ٢) (|ن)²

ج) |٢ن |ن−٣ = ٧٢ |٢ن−٧

١٠) إذا كان ٢ × ١٤ق ر+١ ، ٣ × ١٤ق ر ، ٦ × ١٤ق ر−١
في تتابع هندسي أوجد ر

ت/ ٠١١١٥١٥٦٦٢٣٢



إعداد أ / ناصر أبوزيد

الحصة الثانية

نظرية ذات الحدين

إذا كان أ ، س ∈ ح ، ن ∈ ص+ فإن

* $(س + أ)^ن = س^ن + {}^نق_١ س^{ن-١} أ + {}^نق_٢ س^{ن-٢} أ^٢ + --- + أ^ن$
* $(س - أ)^ن = س^ن - {}^نق_١ س^{ن-١} أ + {}^نق_٢ س^{ن-٢} أ^٢ + --- + (-أ)^ن$

مثال:

$(س + أ)^٥$

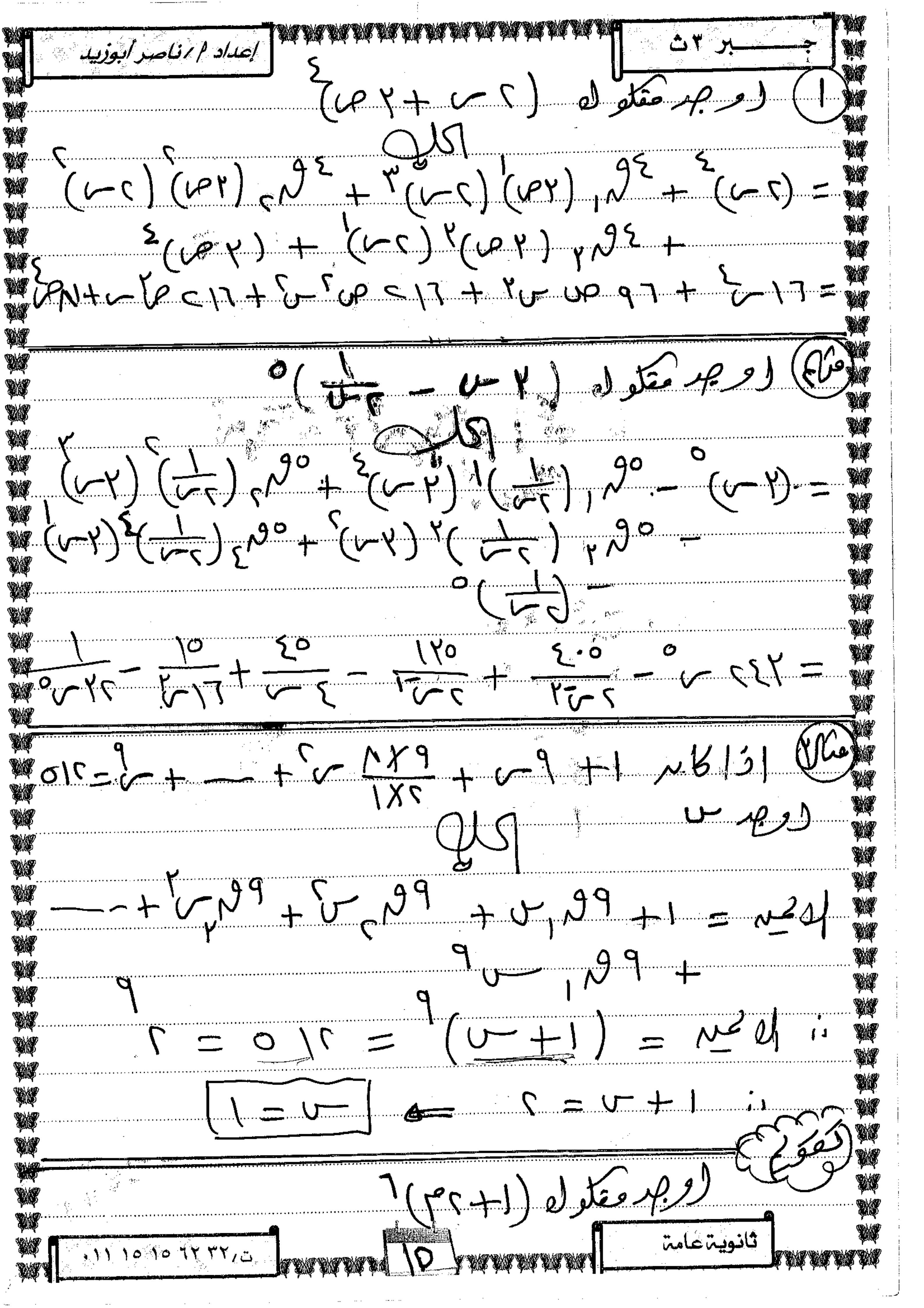
$= س^٥ + {}^٥ق_١ س^٤ أ + {}^٥ق_٢ س^٣ أ^٢ + {}^٥ق_٣ س^٢ أ^٣ + {}^٥ق_٤ س أ^٤ + {}^٥ق_٥ أ^٥$

$= س^٥ + ٥ س^٤ أ + ١٠ س^٣ أ^٢ + ١٠ س^٢ أ^٣ + ٥ س أ^٤ + أ^٥$

ملاحظات

* مجموع معاملات المفكوك $(أس + ب)^ن$ هو $(أ + ب)^ن$
* عدد حدود المفكوك = ن + ١
* مجموع أسي س وأسي أ في أي حد = ن
* إذا كان المفكوك $(س + أ)^ن$ فإن أسس س تكون تنازلية وأسس أ تصاعدية
* رتبة أي حد في المفكوك = دليل ق + ١
* قاعدتان هامتان
* $(س + أ)^ن + (س - أ)^ن = ٢(ح_١ + ح_٣ + ح_٥ + ---)$
ضعف الحدود الفردية
* $(س + أ)^ن - (س - أ)^ن = ٢(ح_٢ + ح_٤ + ح_٦ + ---)$
ضعف الحدود الزوجية
* الحد العام

$ح_{ر+١} = {}^نق_ر (الثاني)^ر × (الأول)^{ن-ر}$



(١) أوجد مفكوك $(٢س + ٢ص)^{٤}$

الحل

$= (٢س)^{٤} + {}^{٤}ق_{١}\,(٢ص)^{١}(٢س)^{٣} + {}^{٤}ق_{٢}\,(٢ص)^{٢}(٢س)^{٢}$

$+ {}^{٤}ق_{٣}\,(٢ص)^{٣}(٢س)^{١} + (٢ص)^{٤}$

$= ١٦س^{٤} + ٦٤ص س^{٣} + ٩٦ص^{٢}س^{٢} + ٦٤ص^{٣}س + ١٦ص^{٤}$

مثال: أوجد مفكوك $\left(٢س - \frac{١}{س^{٢}}\right)^{٥}$

الحل

$= (٢س)^{٥} - {}^{٥}ق_{١}\left(\frac{١}{س^{٢}}\right)^{١}(٢س)^{٤} + {}^{٥}ق_{٢}\left(\frac{١}{س^{٢}}\right)^{٢}(٢س)^{٣}$

$- {}^{٥}ق_{٣}\left(\frac{١}{س^{٢}}\right)^{٣}(٢س)^{٢} + {}^{٥}ق_{٤}\left(\frac{١}{س^{٢}}\right)^{٤}(٢س)^{١}$

$- \left(\frac{١}{س^{٢}}\right)^{٥}$

$= ٣٢س^{٥} - ٨٠س^{٢} + \frac{٨٠}{س} - \frac{٤٠}{س^{٤}} + \frac{١٠}{س^{٧}} - \frac{١}{س^{١٠}}$

مثال (٢): إذا كان $١ + ٩س + \frac{٩ \times ٨}{١ \times ٢}س^{٢} + \cdots + س^{٩} = ٥١٢$

أوجد س

الحل

الطرف الأيمن $= ١ + {}^{٩}ق_{١}\,س + {}^{٩}ق_{٢}\,س^{٢} + {}^{٩}ق_{٣}\,س^{٣} + \cdots$

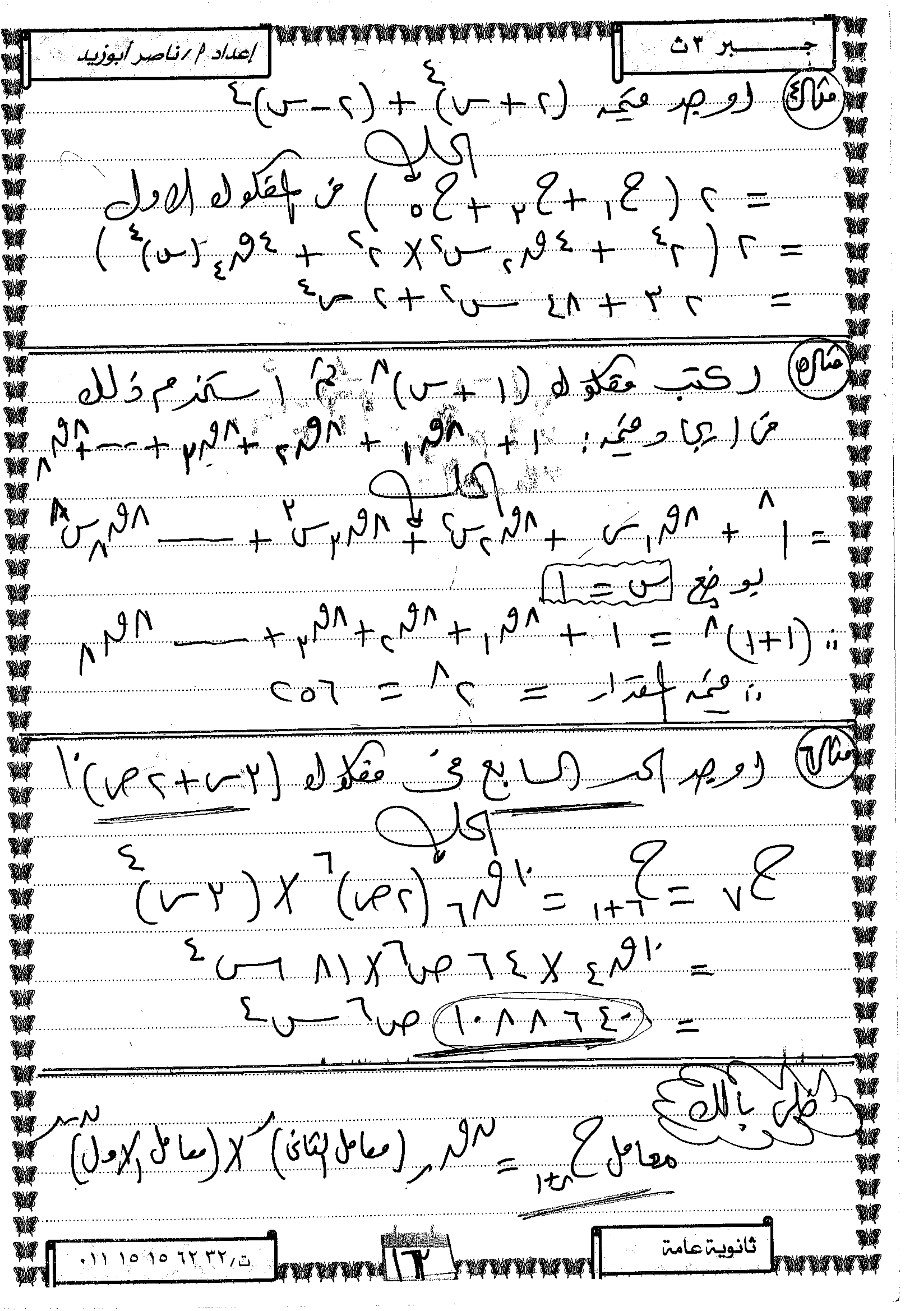
$+ {}^{٩}ق_{٩}\,س^{٩}$

∴ الطرف الأيمن $= (١ + س)^{٩} = ٥١٢ = ٢^{٩}$

∴ $١ + س = ٢ \Leftarrow$ $\boxed{س = ١}$

تقويم

أوجد مفكوك $(١ + ٢ص)^{٦}$



مثال ٤ أوجد قيمة $(2+س)^4 + (2-س)^4$

الحل

$= 2 (ح_1 + ح_3 + ح_5)$ من المفكوك الأول

$= 2 \left(2^4 + {}^4ق_2 \, س^2 \times 2^2 + {}^4ق_4 (س)^4 \right)$

$= 32 + 48 \, س^2 + 2 \, س^4$

مثال ٥ اكتب مفكوك $(1+س)^8$ ثم استخدم ذلك في إيجاد قيمة: $1 + {}^8ق_1 + {}^8ق_2 + {}^8ق_3 + \cdots + {}^8ق_8$

الحل

$= 1^8 + {}^8ق_1 \, س + {}^8ق_2 \, س^2 + {}^8ق_3 \, س^3 + \cdots + {}^8ق_8 \, س^8$

بوضع $س = 1$

$\therefore (1+1)^8 = 1 + {}^8ق_1 + {}^8ق_2 + {}^8ق_3 + \cdots + {}^8ق_8$

$\therefore$ قيمة المقدار $= 2^8 = 256$

مثال ٦ أوجد الحد السابع في مفكوك $(3س + 2ص)^{10}$

الحل

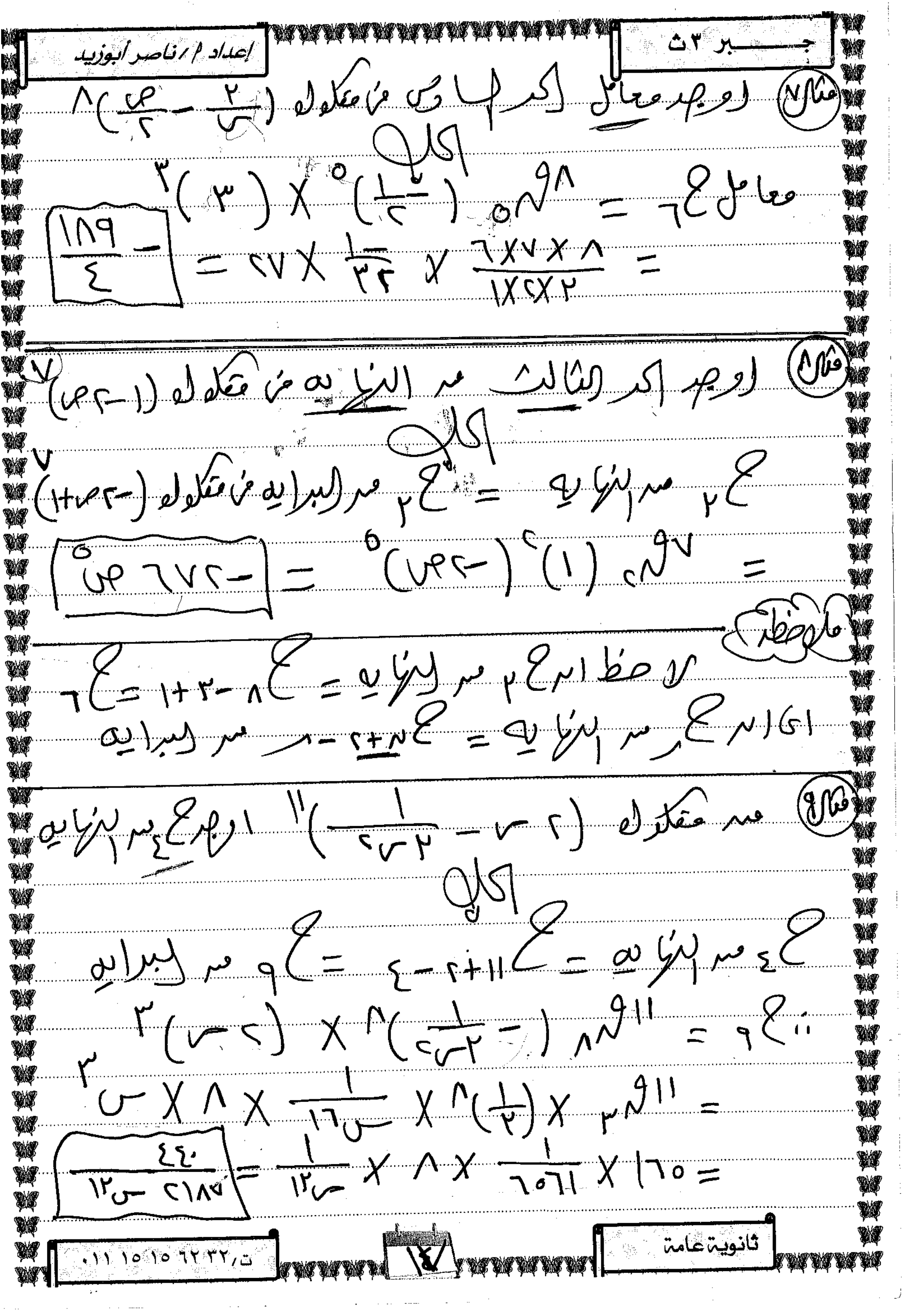
$ح_7 = ح_{6+1} = {}^{10}ق_6 \, (2ص)^6 \times (3س)^4$

$= {}^{10}ق_4 \times 64 \, ص^6 \times 81 \, س^4$

$= 1088640 \, ص^6 \, س^4$

خلي بالك

معامل $ح_{ر+1} = {}^نق_ر \, (\text{معامل الثاني})^ر \times (\text{معامل الأول})^{ن-ر}$



مثال ٧ أوجد معامل الحد السادس من مفكوك $(\frac{٢}{س} - \frac{ص}{٢})^{٨}$

الحل

معامل ح٦ = $^{٨}ق_{٥} (\frac{-١}{٢})^{٥} \times (٣)^{٣}$

$= \frac{٨ \times ٧ \times ٦}{١ \times ٢ \times ٣} \times \frac{-١}{٣٢} \times ٢٧ = \boxed{-\frac{١٨٩}{٤}}$

مثال ٨ أوجد الحد الثالث من النهاية من مفكوك $(١ - ٢س)^{٧}$

الحل

ح٣ من النهاية = ح٣ من البداية من مفكوك $(-٢س + ١)^{٧}$

$= {}^{٧}ق_{٢} (١)^{٢} (-٢س)^{٥} = \boxed{-٦٧٢ س^{٥}}$

ملاحظة

لاحظ أن ح٣ من النهاية = ح٨−٣+١ = ح٦

أي أن حر من النهاية = ح ن+٢−ر من البداية

مثال ٩ من مفكوك $(٢س - \frac{١}{٢س^{٢}})^{١١}$ أوجد ح٤ من النهاية

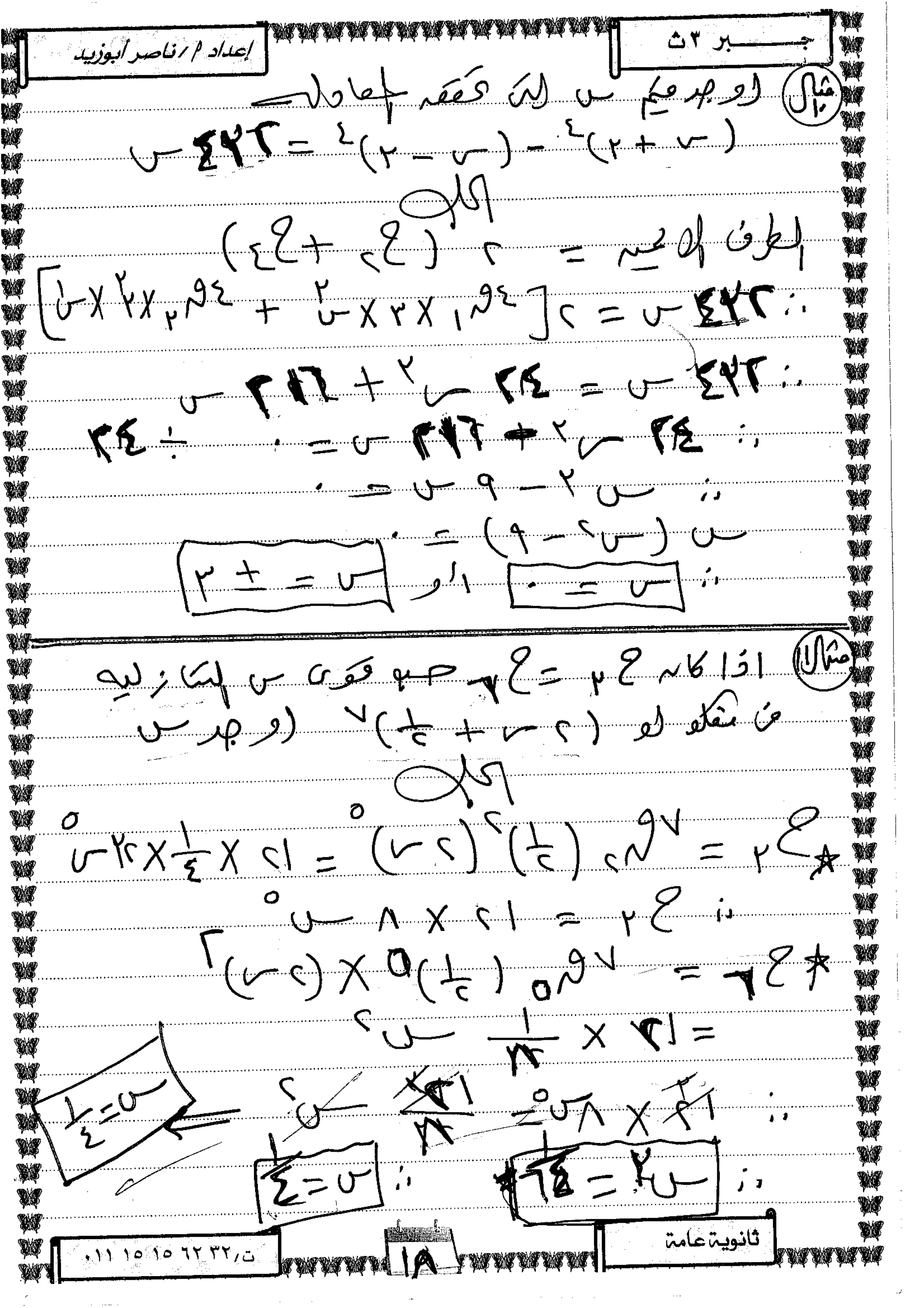
الحل

ح٤ من النهاية = ح١١+٢−٤ = ح٩ من البداية

∴ ح٩ = $^{١١}ق_{٨} (\frac{-١}{٢س^{٢}})^{٨} \times (٢س)^{٣}$

$= {}^{١١}ق_{٣} \times (\frac{١}{٢})^{٨} \times \frac{١}{س^{١٦}} \times ٨ \times س^{٣}$

$= ١٦٥ \times \frac{١}{٦٥٦١} \times ٨ \times \frac{١}{س^{١٣}} = \boxed{\frac{٤٤٠}{٢١٨٧ س^{١٣}}}$



مثال ١٠ أوجد قيم س التي تحقق المعادلة

$(س + ٣)^٤ - (س - ٣)^٤ = ٤٣٢ س$

الحل

الطرف الأيمن $= ٢ (ح_٢ + ح_٤)$

$\therefore ٤٣٢ س = ٢ [\,^٤ق_١ \times ٣ \times س^٣ + \,^٤ق_٣ \times ٣^٣ \times س]$

$\therefore ٤٣٢ س = ٢٤ س^٣ + ٢١٦ س$

$\therefore ٢٤ س^٣ - ٢١٦ س = ٠ \quad \div ٢٤$

$\therefore س^٣ - ٩ س = ٠$

$س (س^٢ - ٩) = ٠$

$\therefore س = ٠$ أو $س = \pm ٣$

مثال ١١ إذا كان $ح_٢ = ح_٦$ حيث حر هو الحد الرائي في مفكوك $(٢س + \frac{١}{٢})^٧$ أوجد س

الحل

$\star\ ح_٢ = \,^٧ق_٢ (\frac{١}{٢})^٢ (٢س)^٥ = ٢١ \times \frac{١}{٤} \times ٣٢ س^٥$

$\therefore ح_٢ = ٢١ \times ٨ س^٥$

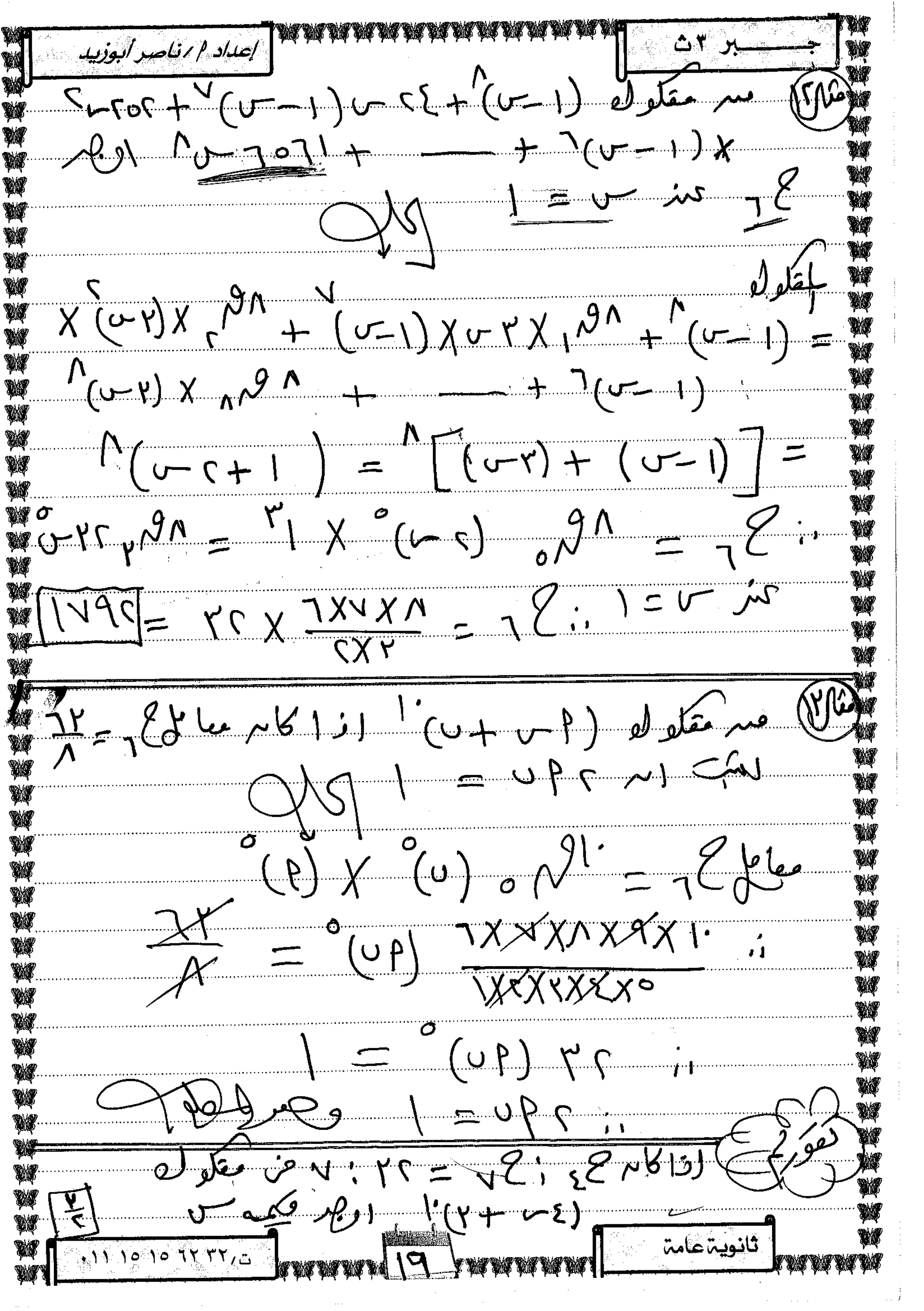
$\star\ ح_٦ = \,^٧ق_٥ (\frac{١}{٢})^٥ \times (٢س)^٢$

$= ٢١ \times \frac{١}{٨} س^٢$

$\therefore ٢١ \times ٨ س^٥ = \frac{٢١}{٨} س^٢$

$\therefore س^٣ = \frac{١}{٦٤}$

$\therefore س = \frac{١}{٤}$



مثال (١٣) من مفكوك $(١ - س)^{٨} + ٢٤س(١ - س)^{٧} + ٢٥٢س^{٢}(١ - س)^{٦} + \ldots + ٦٥٦١س^{٨}$ أوجد $ع_٦$ عندما $س = ١$

الحل

المفكوك $= (١ - س)^{٨} + {}^{٨}ق_{١} \times ٣س \times (١ - س)^{٧} + {}^{٨}ق_{٢} \times (٣س)^{٢} \times (١ - س)^{٦} + \ldots + {}^{٨}ق_{٨} \times (٣س)^{٨}$

$= [(١ - س) + (٣س)]^{٨} = (١ + ٢س)^{٨}$

$\therefore ع_٦ = {}^{٨}ق_{٥} \, (٢س)^{٥} \times ١^{٣} = {}^{٨}ق_{٥} \times ٣٢ س^{٥}$

عندما $س = ١ \quad \therefore ع_٦ = \frac{٨ \times ٧ \times ٦}{٣ \times ٢} \times ٣٢ = \boxed{١٧٩٢}$

مثال (١٤) من مفكوك $(أس + ب)^{١٠}$ إذا كان معامل $ع_٦ = \frac{٦٣}{٨}$ أثبت أن $٢أب = ١$

الحل

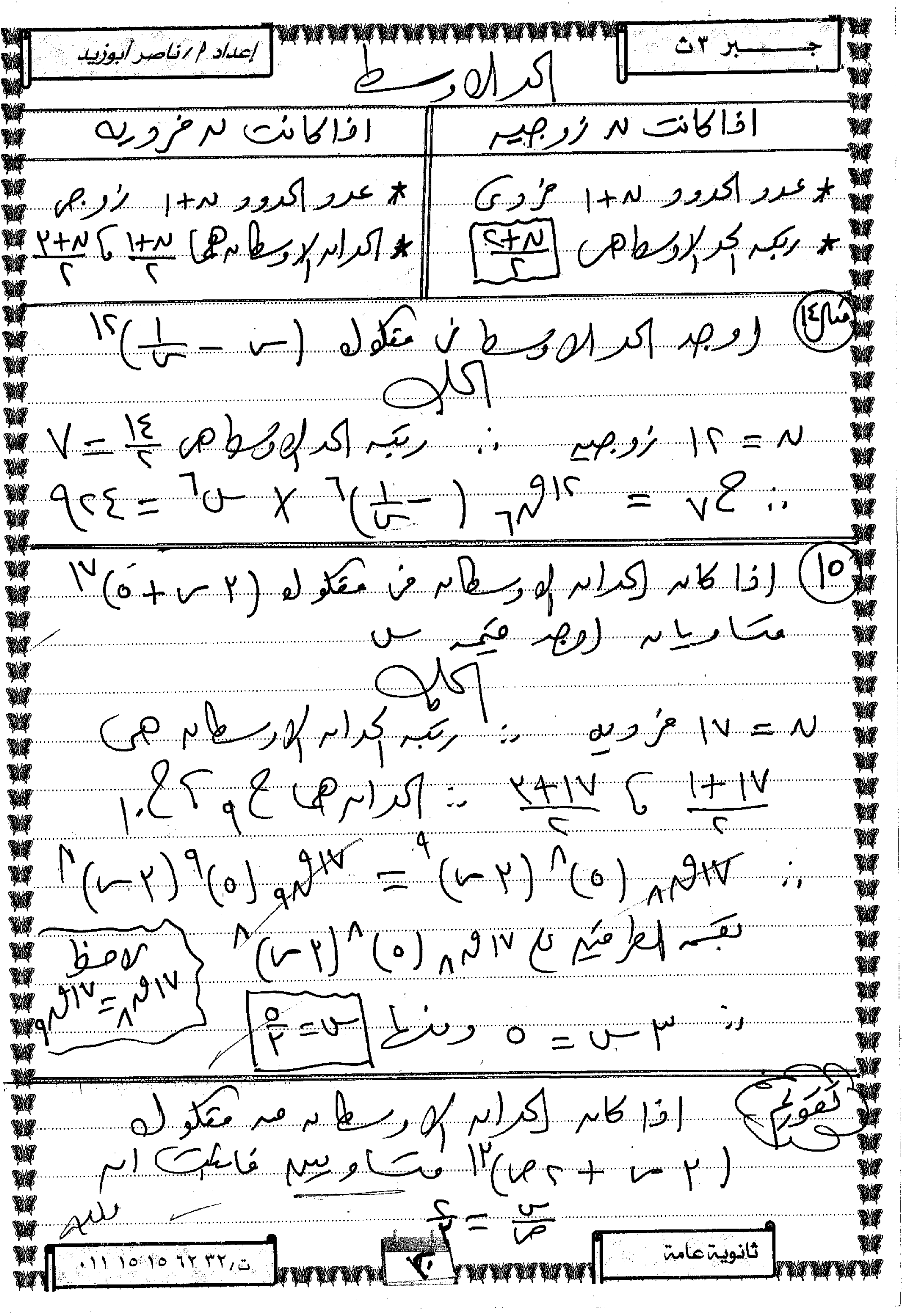
معامل $ع_٦ = {}^{١٠}ق_{٥} \, (ب)^{٥} \times (أ)^{٥}$

$\therefore \frac{١٠ \times ٩ \times ٨ \times ٧ \times ٦}{١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ \times ٥} (أب)^{٥} = \frac{٦٣}{٨}$

$\therefore ٣٢ (أب)^{٥} = ١$

$\therefore ٢أب = ١$ وهو المطلوب

تقويم: إذا كان $ع_٤ : ع_٧ = ٣٢ : ٧$ من مفكوك $(٤س + ٣)^{١٠}$ أوجد قيمة س



إعداد م/ ناصر أبوزيد

الحد الأوسط

إذا كانت ن زوجية	إذا كانت ن فردية
* عدد الحدود ن+١ فردي	* عدد الحدود ن+١ زوجي
* رتبة الحد الأوسط هي $\frac{ن+٢}{٢}$	* الحدان الأوسطان هما $\frac{ن+١}{٢}$ ، $\frac{ن+٢}{٢}$

مثال ١٤ أوجد الحد الأوسط في مفكوك $(س - \frac{١}{س})^{١٢}$

الحل

ن = ١٢ زوجية ∴ رتبة الحد الأوسط هي $\frac{١٤}{٢} = ٧$

∴ $ح_٧ = {}^{١٢}ق_٦ (-\frac{١}{س})^٦ \times س^٦ = ٩٢٤$

١٥ إذا كان الحدان الأوسطان في مفكوك $(٢س + ٥)^{١٧}$ متساويان أوجد قيمة س

الحل

ن = ١٧ فردية ∴ رتبة الحدان الأوسطان هي

$\frac{١٧+١}{٢}$ ، $\frac{١٧+٢}{٢}$ ∴ الحدان هما ح٩ ، ح١٠

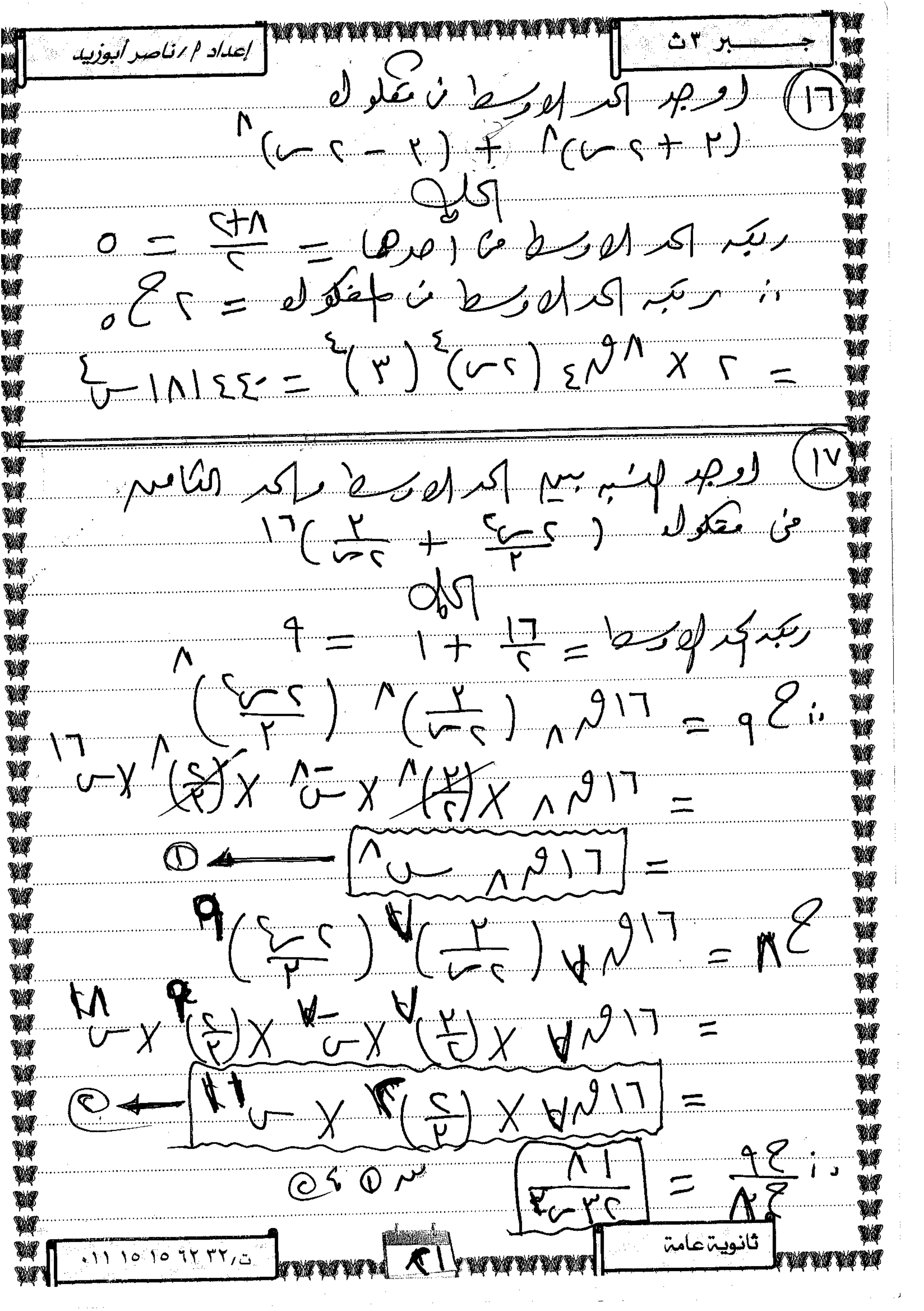
∴ ${}^{١٧}ق_٨ (٥)^٨ (٢س)^٩ = {}^{١٧}ق_٩ (٥)^٩ (٢س)^٨$

بقسمة الطرفين على ${}^{١٧}ق_٨ (٥)^٨ (٢س)^٨$

∴ ٢س = ٥ ومنها $س = \frac{٥}{٢}$

لاحظ: ${}^{١٧}ق_٩ = {}^{١٧}ق_٨$

تقويم إذا كان الحدان الأوسطان من مفكوك $(٢س + ٣ص)^{١٣}$ متساويين فأثبت أن $\frac{س}{ص} = \frac{٣}{٢}$



(١٦) أوجد الحد الأوسط في مفكوك

$(٣ + ٢س)^{٨} + (٣ - ٢س)^{٨}$

الحل

رتبة الحد الأوسط في أحدهما = $\frac{٨+٢}{٢}$ = ٥

∴ رتبة الحد الأوسط في مفكوك = ٢ ح٥

= ٢ × $^{٨}ق_{٤}$ $(٢س)^{٤}$ $(٣)^{٤}$ = ١٨١٤٤٠ $س^{٤}$

---

(١٧) أوجد النسبة بين الحد الأوسط والحد الثامن

من مفكوك $(\frac{س^{٢}}{٢} + \frac{٢}{س})^{١٦}$

الحل

رتبة الحد الأوسط = $\frac{١٦}{٢} + ١$ = ٩

∴ ح٩ = $^{١٦}ق_{٨}$ $(\frac{٢}{س})^{٨}$ $(\frac{س^{٢}}{٢})^{٨}$

= $^{١٦}ق_{٨}$ × $(\frac{٢}{٢})^{٨}$ × $س^{-٨}$ × $(\frac{٢}{٢})^{٨}$ × $س^{١٦}$

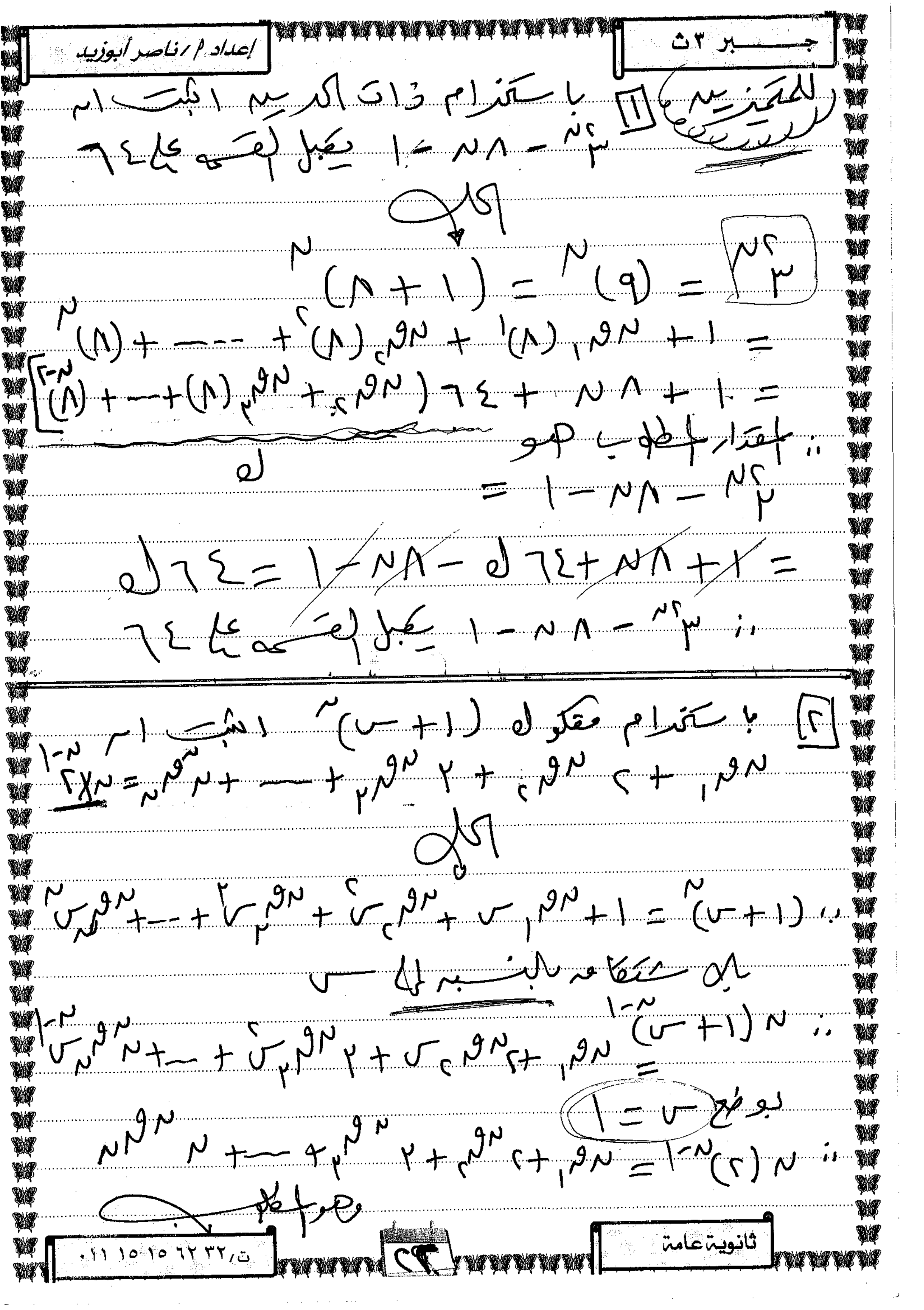
= $^{١٦}ق_{٨}$ $س^{٨}$ ⟵ ①

ح٨ = $^{١٦}ق_{٧}$ $(\frac{٢}{س})^{٧}$ $(\frac{س^{٢}}{٢})^{٩}$

= $^{١٦}ق_{٧}$ × $(\frac{٢}{٢})^{٧}$ × $س^{-٧}$ × $(\frac{٢}{٢})^{٩}$ × $س^{١٨}$

= $^{١٦}ق_{٧}$ × $(\frac{١}{٢})^{٢}$ × $س^{١١}$ ⟵ ②

∴ $\frac{ح٩}{ح٨}$ = $\frac{٨١}{٣٢س^{٣}}$ من ①، ②



للمتميزين

[١] باستخدام ذات الحدين أثبت أن $٣^{٢ن} - ٨ن - ١$ يقبل القسمة على ٦٤

الحل

$٣^{٢ن} = (٩)^{ن} = (٨ + ١)^{ن}$

$= ١ + {}^{ن}ق_{١}(٨) + {}^{ن}ق_{٢}(٨)^{٢} + --- + (٨)^{ن}$

$= ١ + ٨ن + ٦٤\left[{}^{ن}ق_{٢} + {}^{ن}ق_{٣}(٨) + --- + (٨)^{ن-٢}\right]$ ← ل

∴ المقدار المطلوب هو

$= ٣^{٢ن} - ٨ن - ١$

$= ١ + ٨ن + ٦٤ل - ٨ن - ١ = ٦٤ل$

∴ $٣^{٢ن} - ٨ن - ١$ يقبل القسمة على ٦٤

---

[٢] باستخدام مفكوك $(١ + س)^{ن}$ أثبت أن

${}^{ن}ق_{١} + ٢\,{}^{ن}ق_{٢} + ٣\,{}^{ن}ق_{٣} + --- + ن\,{}^{ن}ق_{ن} = ن \times ٢^{ن-١}$

الحل

∵ $(١ + س)^{ن} = ١ + {}^{ن}ق_{١}\,س + {}^{ن}ق_{٢}\,س^{٢} + {}^{ن}ق_{٣}\,س^{٣} + --- + {}^{ن}ق_{ن}\,س^{ن}$

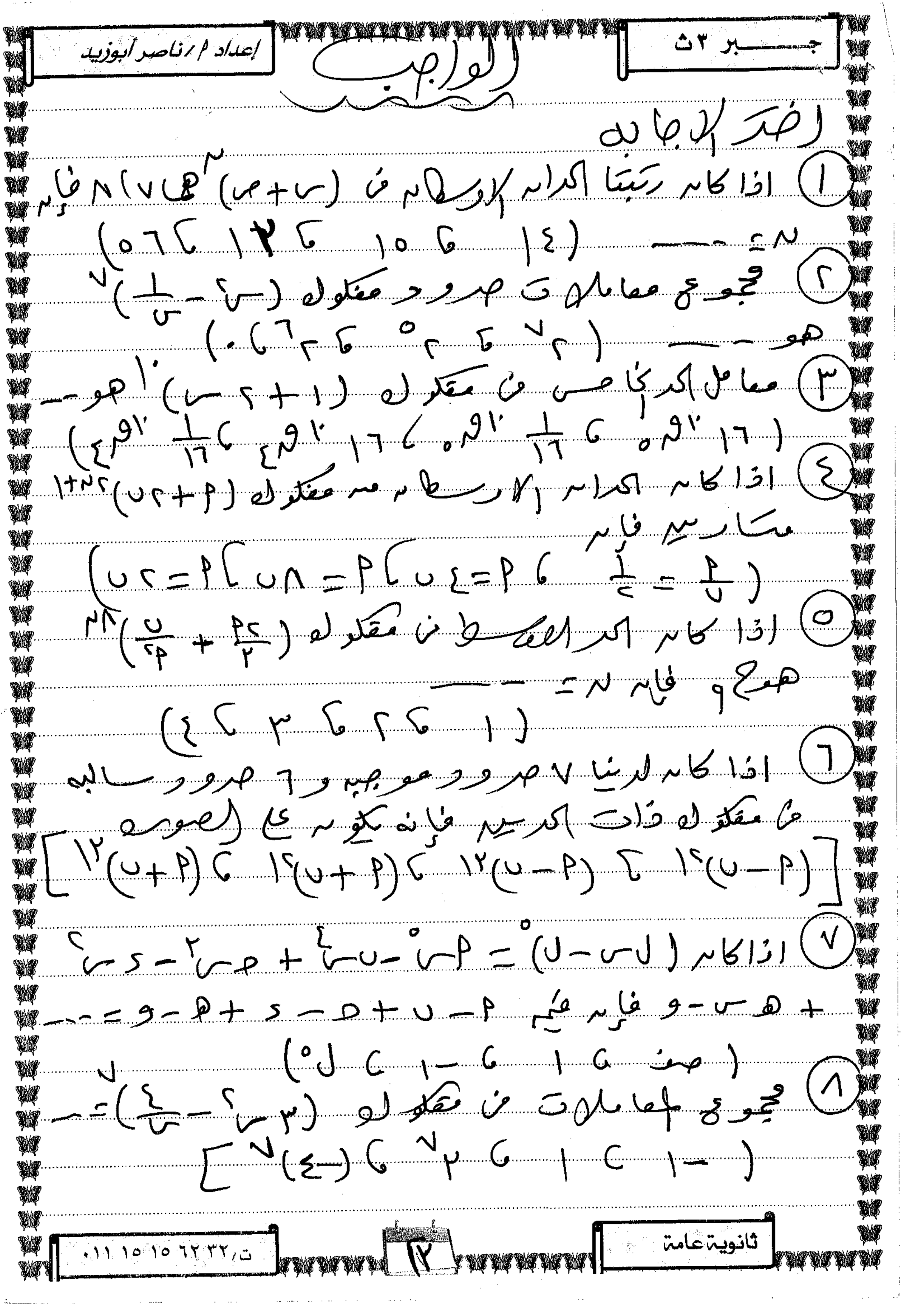
بالتفاضل بالنسبة لـ س

∴ $ن(١ + س)^{ن-١} = {}^{ن}ق_{١} + ٢\,{}^{ن}ق_{٢}\,س + ٣\,{}^{ن}ق_{٣}\,س^{٢} + --- + ن\,{}^{ن}ق_{ن}\,س^{ن-١}$

بوضع $س = ١$

∴ $ن(٢)^{ن-١} = {}^{ن}ق_{١} + ٢\,{}^{ن}ق_{٢} + ٣\,{}^{ن}ق_{٣} + --- + ن\,{}^{ن}ق_{ن}$

وهو المطلوب



الواجب

اختر الإجابة

① إذا كان رتبتا الحدين الأوسطين في مفكوك $(س+ص)^ن$ هما ٧ ، ٨ فإن ن = ــــــ (١٤ ، ١٥ ، ١٣ ، ٥٦)

② مجموع معاملات حدود مفكوك $(س^٢ - \frac{١}{س})^٧$ هو ــــــ ($٢^٧$ ، $٢^٥$ ، $٢^٦$ ، ٠)

③ معامل الحد الخامس في مفكوك $(١ + ٢س)^{١٠}$ هو ــــــ ($١٦ \; {}^{١٠}ق_٥$ ، $\frac{١}{١٦} \; {}^{١٠}ق_٥$ ، $١٦ \; {}^{١٠}ق_٤$ ، $\frac{١}{١٦} \; {}^{١٠}ق_٤$)

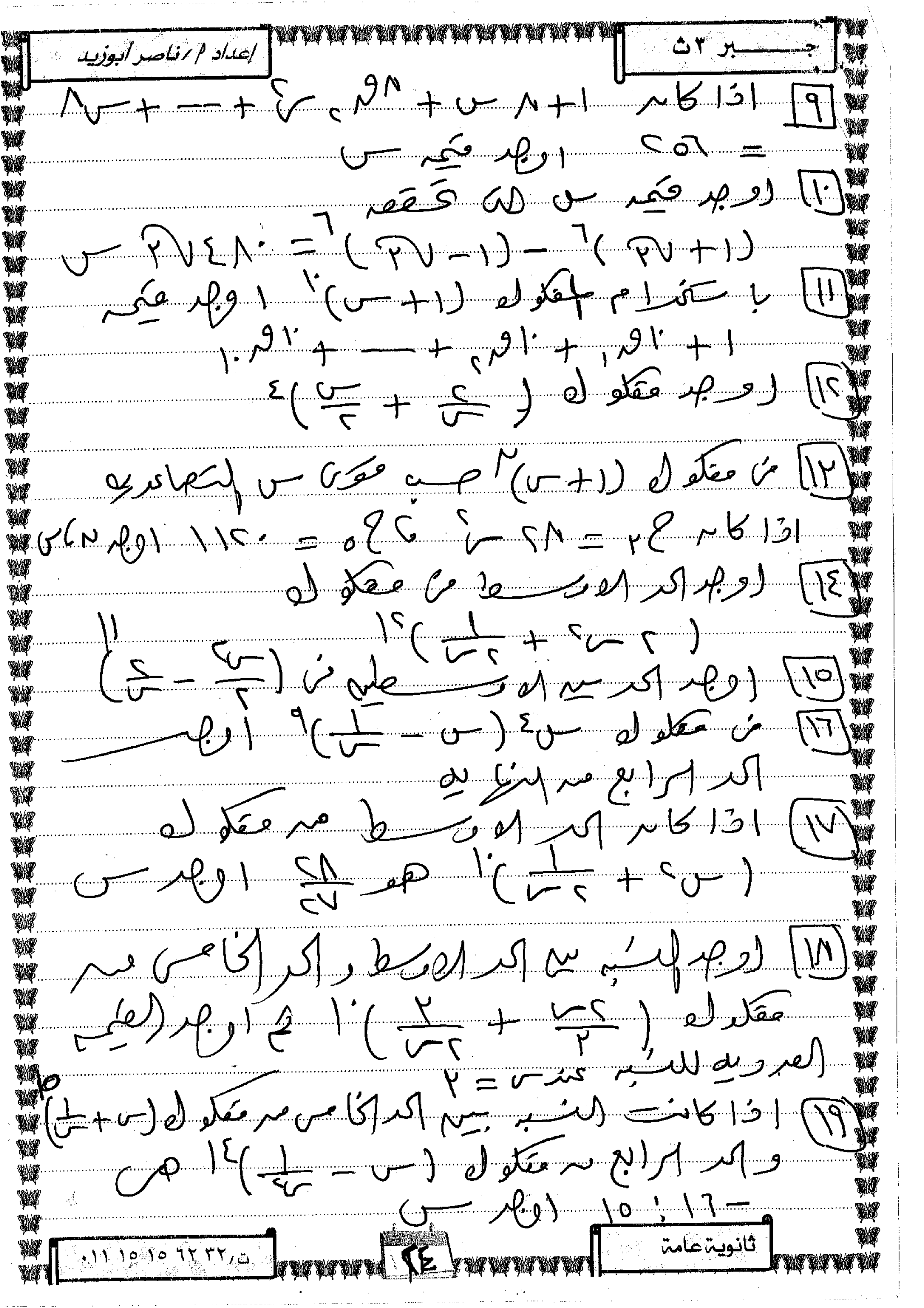
④ إذا كان الحدان الأوسطان من مفكوك $(أ + ٢ن)^{٢ن+١}$ متساويين فإن ($\frac{أ}{ب} = \frac{١}{٢}$ ، أ = ٤ب ، أ = ٨ب ، أ = ٢ب)

⑤ إذا كان الحد الأوسط من مفكوك $(\frac{أ^٢}{٢} + \frac{ب}{أ^٢})^{٢ن}$ هو ح٩ فإن ن = ــــــ (١ ، ٢ ، ٣ ، ٤)

⑥ إذا كان لدينا ٧ حدود موجبة و ٦ حدود سالبة من مفكوك ذات الحدين فإنه يكون على الصورة [$(أ-ب)^{١٢}$ ، $(أ-ب)^{١٣}$ ، $(أ+ب)^{١٢}$ ، $(أ+ب)^{١٣}$]

⑦ إذا كان $(ل س - ل)^٥ = أ س^٥ - ب س^٤ + جـ س^٣ - د س^٢ + هـ س - و$ فإن قيمة أ - ب + جـ - د + هـ - و = ــــــ (صفر ، ١ ، -١ ، $ل^٥$)

⑧ مجموع المعاملات من مفكوك $(٣س^٢ - \frac{٤}{س})^٧$ = ــــــ (-١ ، ١ ، $٢^٧$ ، $(-٤)^٧$]



إعداد أ/ ناصر أبوزيد

٩) إذا كان $١ + ٨ س + {}^{٨}ق_{٢} س^{٢} + \dots + س^{٨} = ٢٥٦$ أوجد قيمة س

١٠) أوجد قيمة س التي تحقق $(١ + \sqrt{٢})^{٦} - (١ - \sqrt{٢})^{٦} = ١٤٠ \sqrt{٢}\, س$

١١) باستخدام مفكوك $(١ + س)^{١٠}$ أوجد قيمة $١ + {}^{١٠}ق_{١} + {}^{١٠}ق_{٢} + \dots + {}^{١٠}ق_{١٠}$

١٢) أوجد مفكوك $(\frac{ح}{س} + \frac{س}{ح})^{٤}$

١٣) في مفكوك $(١ + س)^{ن}$ حسب قوى س التصاعدية إذا كان $ح_{٣} = ٢٨ س^{٢}$ ، $ح_{٥} = ١١٢٠$ أوجد ن ، س

١٤) أوجد الحد الأوسط من مفكوك $(٢ س^{٢} + \frac{١}{س^{٢}})^{١٢}$

١٥) أوجد الحدين الأوسطين في $(\frac{س}{٢} - \frac{ح}{س})^{١١}$

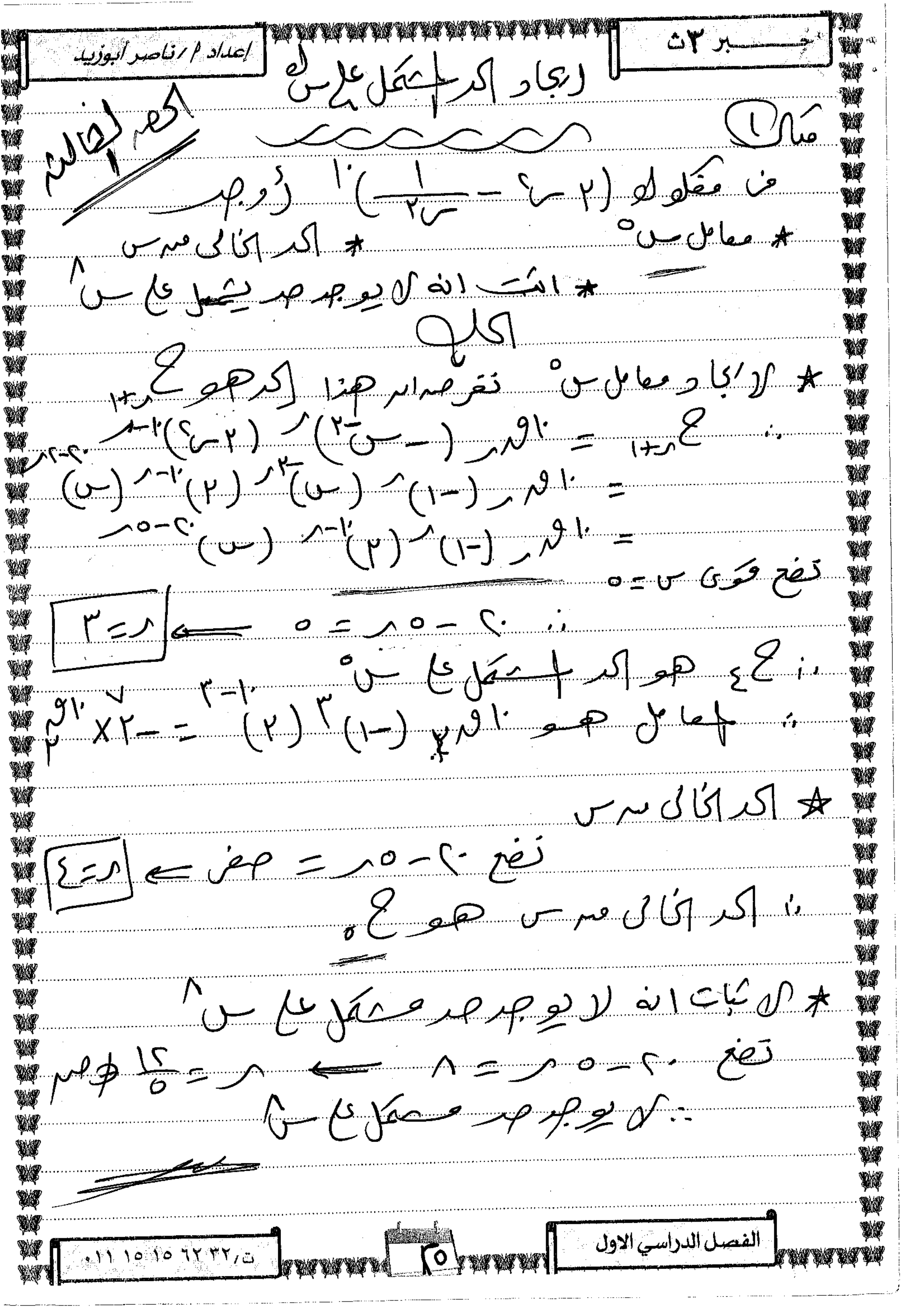
١٦) في مفكوك $س^{٤} (س - \frac{١}{س})^{٩}$ أوجد الحد الرابع من النهاية

١٧) إذا كان الحد الأوسط من مفكوك $(س^{٢} + \frac{١}{س^{٢}})^{١٠}$ هو $\frac{٢٨}{٢٧}$ أوجد س

١٨) أوجد النسبة بين الحد الأوسط والحد الخامس من مفكوك $(\frac{س^{٢}}{٢} + \frac{٢}{س^{٢}})^{١٠}$ ثم أوجد القيمة العددية للنسبة عندما $س = ٢$

١٩) إذا كانت النسبة بين الحد الخامس من مفكوك $(س + \frac{١}{س})^{١٥}$ والحد الرابع من مفكوك $(س - \frac{١}{س^{٢}})^{١٤}$ هي $-١٦ : ١٥$ أوجد س

ت/ ٠١١١٥١٥٦٢٣٢



إعداد أ/ ناصر أبوزيد

إيجاد الحد المشتمل على $س^ك$

الحد العام

مثال (١)

من مفكوك $(2س^2 - \frac{1}{س^3})^{10}$ أوجد

* معامل $س^5$ * الحد الخالي من س

* اثبت انه لا يوجد حد يشتمل على $س^8$

الحل

* لإيجاد معامل $س^5$ نفرض ان هذا الحد هو $ح_{ر+1}$

∴ $ح_{ر+1} = {}^{10}ق_ر (-س^{-3})^ر (2س^2)^{10-ر}$

$= {}^{10}ق_ر (-1)^ر (س)^{-3ر} (2)^{10-ر} (س)^{20-2ر}$

$= {}^{10}ق_ر (-1)^ر (2)^{10-ر} (س)^{20-5ر}$

نضع قوى س = ٥

∴ $20 - 5ر = 5 \Leftarrow ر = 3$

∴ $ح_4$ هو الحد المشتمل على $س^5$

∴ المعامل هو $ {}^{10}ق_3 (-1)^3 (2)^{10-3} = -2^7 \times {}^{10}ق_3$

* الحد الخالي من س

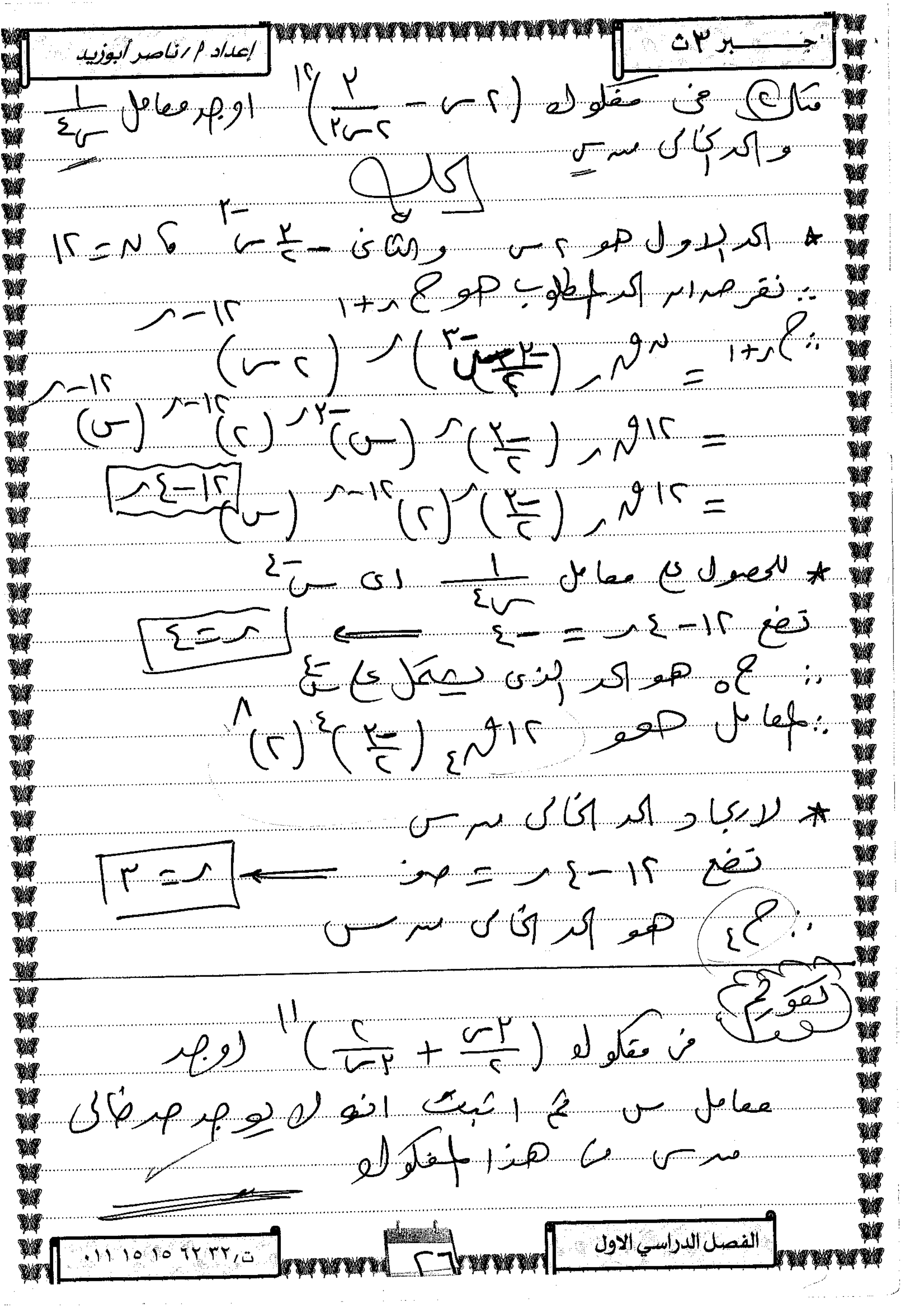
نضع $20 - 5ر = $ صفر $\Leftarrow ر = 4$

∴ الحد الخالي من س هو $ح_5$

* الاثبات انه لا يوجد حد مشتمل على $س^8$

نضع $20 - 5ر = 8 \Leftarrow ر = \frac{12}{5} \notin ص$

∴ لا يوجد حد مشتمل على $س^8$



مثال ⑤ من مفكوك $\left(2س - \frac{3}{2س^{3}}\right)^{12}$ أوجد معامل $\frac{1}{س^{4}}$ والحد الخالي من س

الحل

* الحد الأول هو ٢س والثاني $-\frac{3}{2}س^{-3}$ ، ن = ١٢

∴ نفرض أن الحد المطلوب هو $ح_{ر+1}$

∴ $ح_{ر+1} = {}^{12}ق_{ر} \left(-\frac{3}{2}س^{-3}\right)^{ر} (2س)^{12-ر}$

$= {}^{12}ق_{ر} \left(-\frac{3}{2}\right)^{ر} (س)^{-3ر} (2)^{12-ر} (س)^{12-ر}$

$= {}^{12}ق_{ر} \left(-\frac{3}{2}\right)^{ر} (2)^{12-ر} (س)^{\boxed{12-4ر}}$

* للحصول على معامل $\frac{1}{س^{4}}$ أي $س^{-4}$

نضع ١٢ − ٤ر = −٤ ⟸ $\boxed{ر = 4}$

∴ $ح_{5}$ هو الحد الذي يحتوي على $س^{-4}$

∴ المعامل هو ${}^{12}ق_{4} \left(-\frac{3}{2}\right)^{4} (2)^{8}$

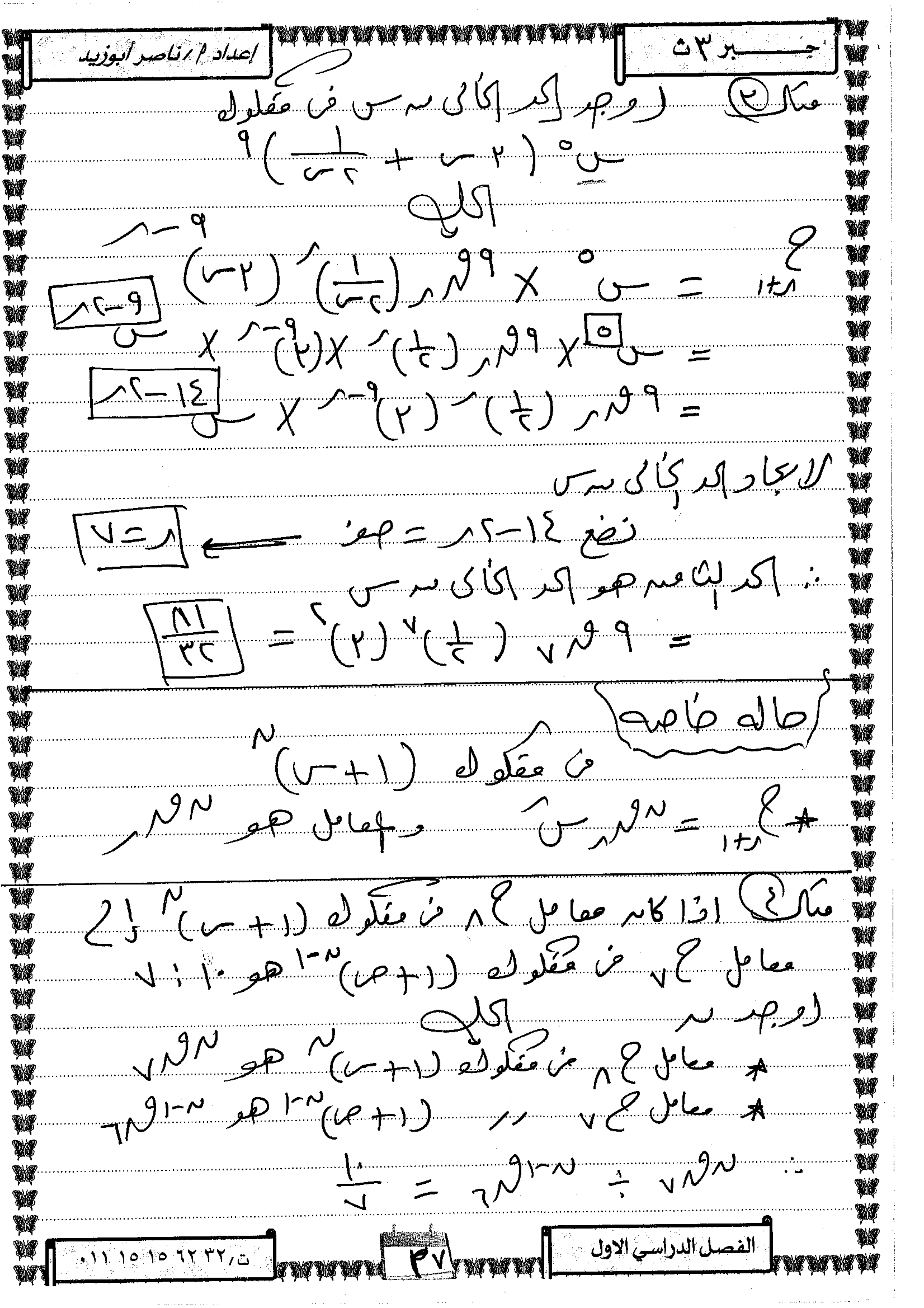
* لإيجاد الحد الخالي من س

نضع ١٢ − ٤ر = صفر ⟸ $\boxed{ر = 3}$

∴ $ح_{4}$ هو الحد الخالي من س

تقويم

من مفكوك $\left(\frac{2س}{3} + \frac{3}{2س^{2}}\right)^{11}$ أوجد معامل س ثم أثبت أنه لا يوجد حد خالي من س في هذا المفكوك



مثال (٣) أوجد الحد الخالي من س في مفكوك

$$س^{5}\left(٢س + \frac{1}{٢س}\right)^{9}$$

الحل

$$ح_{ر+1} = س^{5} \times {}^{9}ق_{ر} \left(\frac{1}{٢س}\right)^{ر} (٢س)^{9-ر}$$

$$= س^{5} \times {}^{9}ق_{ر} \left(\frac{1}{2}\right)^{ر} \times (٢)^{9-ر} \times س^{9-٢ر}$$

$$= {}^{9}ق_{ر} \left(\frac{1}{2}\right)^{ر} (٢)^{9-ر} \times س^{14-٢ر}$$

لايجاد الحد الخالي من س

نضع $14 - ٢ر = $ صفر $\Longleftarrow$ $ر = 7$

∴ الحد الثامن هو الحد الخالي من س

$$= {}^{9}ق_{7} \left(\frac{1}{2}\right)^{7} (٢)^{2} = \frac{81}{32}$$

حالة خاصة

في مفكوك $(1 + س)^{ن}$

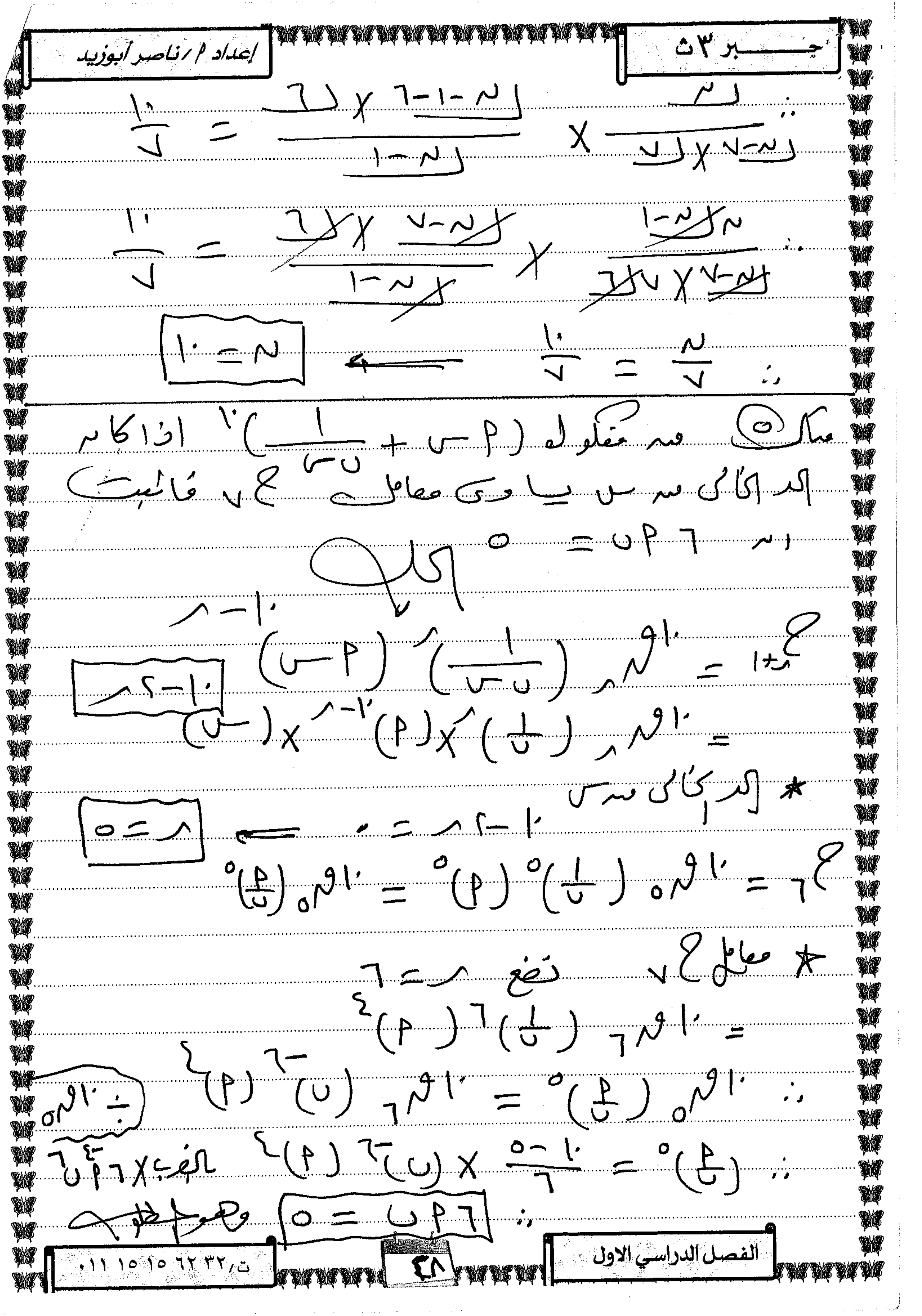
* $ح_{ر+1} = {}^{ن}ق_{ر}\, س^{ر}$ والمعامل هو ${}^{ن}ق_{ر}$

مثال (٤) اذا كان معامل $ح_{8}$ في مفكوك $(1 + س)^{ن}$ إلى معامل $ح_{7}$ في مفكوك $(1 + ص)^{ن-1}$ هو $10 : 7$ أوجد ن

الحل

* معامل $ح_{8}$ في مفكوك $(1 + س)^{ن}$ هو ${}^{ن}ق_{7}$
* معامل $ح_{7}$ " " $(1 + ص)^{ن-1}$ هو ${}^{ن-1}ق_{6}$

∴ ${}^{ن}ق_{7} \div {}^{ن-1}ق_{6} = \frac{10}{7}$



$\because \frac{\lfloor ن}{\lfloor ن-٧ \times \lfloor ٧} \times \frac{\lfloor ن-١-٦ \times \lfloor ٦}{\lfloor ن-١} = \frac{١٠}{٧}$

$\because \frac{ن \lfloor ن-١}{٧ \lfloor ٦ \times \lfloor ن-٧} \times \frac{\lfloor ن-٧ \times \lfloor ٦}{\lfloor ن-١} = \frac{١٠}{٧}$

$\therefore \frac{ن}{٧} = \frac{١٠}{٧} \Leftarrow$ **ن = ١٠**

مثال ⑤ في مفكوك $(أ س + \frac{١}{ب س})^{١٠}$ إذا كان الحد الخالي من س يساوي معامل $ح_٧$ فأثبت أن ٦ أ ب = ٥

الحل

$ح_{ر+١} = {}^{١٠}ق_ر \left(\frac{١}{ب س}\right)^ر (أ س)^{١٠-ر}$

$= {}^{١٠}ق_ر \left(\frac{١}{ب}\right)^ر \times (أ)^{١٠-ر} \times (س)^{١٠-٢ر}$ **[١٠ − ٢ر]**

* الحد الخالي من س

$١٠ - ٢ر = ٠ \Leftarrow$ **ر = ٥**

$ح_٦ = {}^{١٠}ق_٥ \left(\frac{١}{ب}\right)^٥ (أ)^٥ = {}^{١٠}ق_٥ \left(\frac{أ}{ب}\right)^٥$

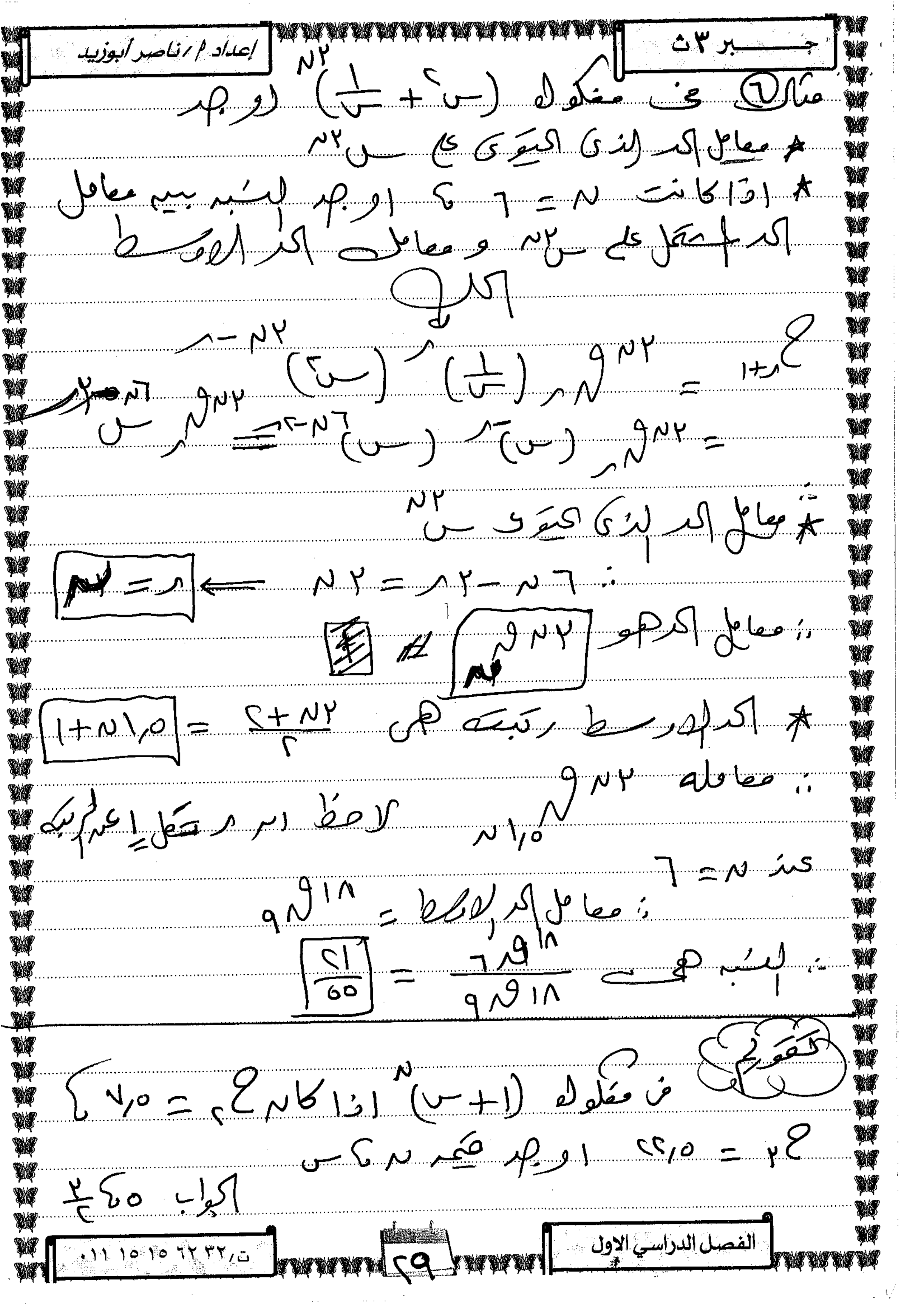
* معامل $ح_٧$ نضع ر = ٦

$= {}^{١٠}ق_٦ \left(\frac{١}{ب}\right)^٦ (أ)^٤$

$\therefore {}^{١٠}ق_٥ \left(\frac{أ}{ب}\right)^٥ = {}^{١٠}ق_٦ (ب)^{-٦} (أ)^٤$ ÷ ${}^{١٠}ق_٥$

$\therefore \left(\frac{أ}{ب}\right)^٥ = \frac{١٠-٥}{٦} \times (ب)^{-٦} (أ)^٤$ بالضرب × $٦ \frac{ب^٦}{أ^٤}$

$\therefore$ **٦ أ ب = ٥** وهو المطلوب



مثال (٦) في مفكوك $(س^٢ + \frac{١}{س})^{٣ن}$ أوجد

* معامل الحد الذي يحتوي على $س^{٣ن}$
* إذا كانت ن = ٦ ، أوجد النسبة بين معامل الحد المشتمل على $س^{٣ن}$ ومعامل الحد الأوسط

الحل

$ح_{ر+١} = {}^{٣ن}ق_ر \left(\frac{١}{س}\right)^ر (س^٢)^{٣ن-ر}$

$= {}^{٣ن}ق_ر (س)^{-ر} (س)^{٦ن-٢ر} = {}^{٣ن}ق_ر \, س^{٦ن-٣ر}$

* معامل الحد الذي يحتوي $س^{٣ن}$

∵ ٦ن − ٣ر = ٣ن ⟸ ر = ن

∴ معامل الحد هو ${}^{٣ن}ق_ن$

* الحد الأوسط رتبته هي $\frac{٣ن+٢}{٢} = ١,٥ن + ١$

∴ معامله ${}^{٣ن}ق_{١,٥ن}$ لاحظ أن ن تمثل عدد زوجي

عند ن = ٦

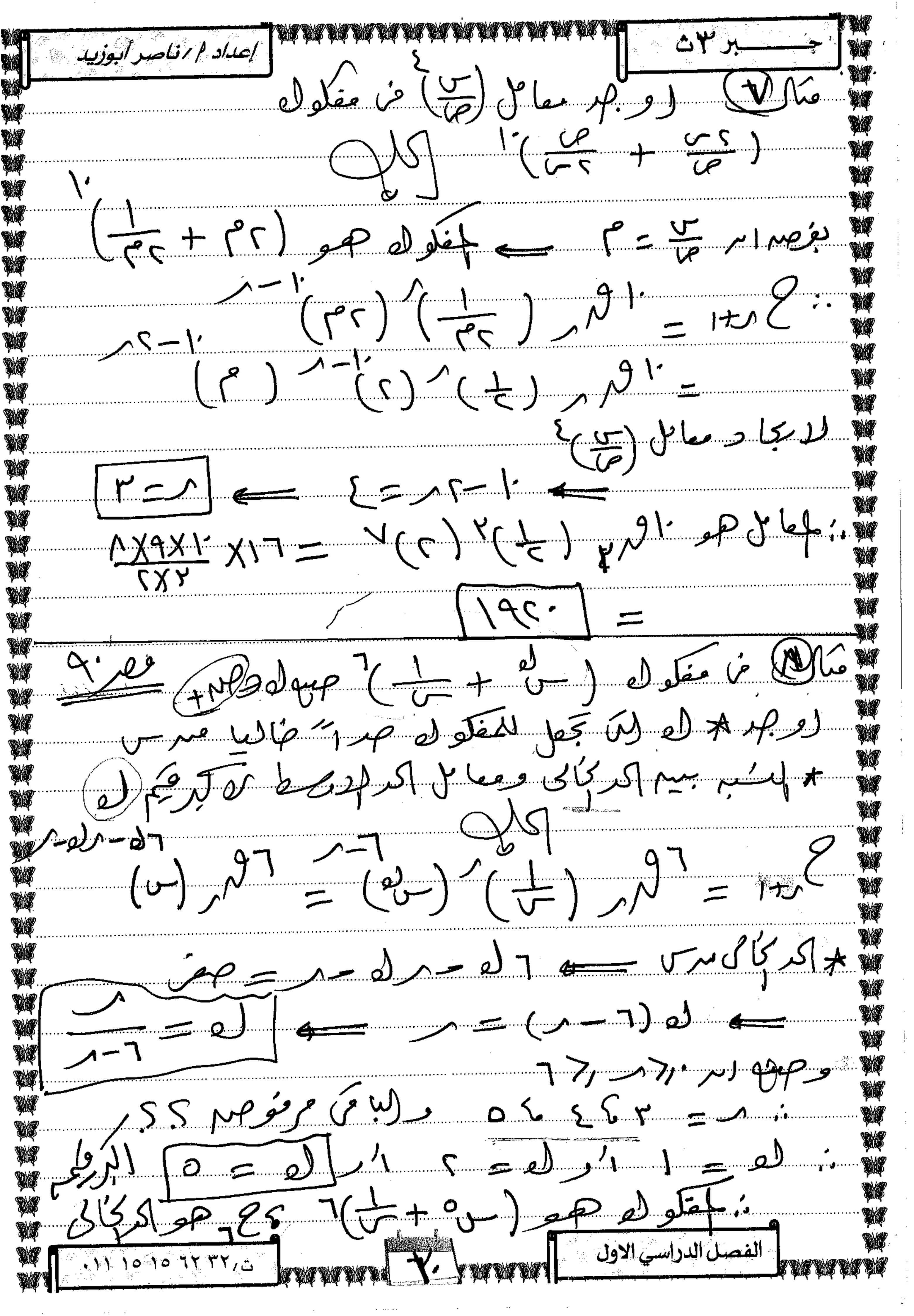
∴ معامل الحد الأوسط = ${}^{١٨}ق_٩$

∴ النسبة هي $\frac{{}^{١٨}ق_٦}{{}^{١٨}ق_٩} = \frac{٢١}{٥٥}$

تمرين

في مفكوك $(١+س)^ن$ إذا كان $ح_٢ = ٧,٥$ ، $ح_٣ = ٢٢,٥$ أوجد قيمة ن ، س

الجواب ٥ ، $\frac{٣}{٢}$



مثال (٧) اوجد معامل $\left(\frac{س}{ص}\right)^{٤}$ في مفكوك $\left(\frac{٢س}{ص} + \frac{ص}{٢س}\right)^{١٠}$ كلية

بفرض ان $\frac{س}{ص} = م$ ← المفكوك هو $\left(٢م + \frac{١}{٢م}\right)^{١٠}$

$$\therefore ح_{ر+١} = {}^{١٠}ق_{ر} \left(\frac{١}{٢م}\right)^{ر} (٢م)^{١٠-ر}$$

$$= {}^{١٠}ق_{ر} \left(\frac{١}{٢}\right)^{ر} (٢)^{١٠-ر} (م)^{١٠-٢ر}$$

لايجاد معامل $\left(\frac{س}{ص}\right)^{٤}$

$١٠ - ٢ر = ٤$ ← $ر = ٣$

$$\therefore \text{المعامل هو } {}^{١٠}ق_{٣} \left(\frac{١}{٢}\right)^{٣} (٢)^{٧} = ١٦ \times \frac{٨ \times ٩ \times ١٠}{٣ \times ٢}$$

$$= ١٩٢٠$$

مثال (٨) في مفكوك $\left(س^{ك} + \frac{١}{س}\right)^{٦}$ حيث ك ∈ ص+ فصل ٩٠

اوجد * ك التي تجعل للمفكوك حداً خالياً من س

* النسبة بين الحد الخالي ومعامل الحد الأوسط لأكبر قيم ك كلية

$$ح_{ر+١} = {}^{٦}ق_{ر} \left(\frac{١}{س}\right)^{ر} (س^{ك})^{٦-ر} = {}^{٦}ق_{ر} (س)^{٦ك - رك - ر}$$

* الحد الخالي من س ← $٦ك - رك - ر = $ صفر

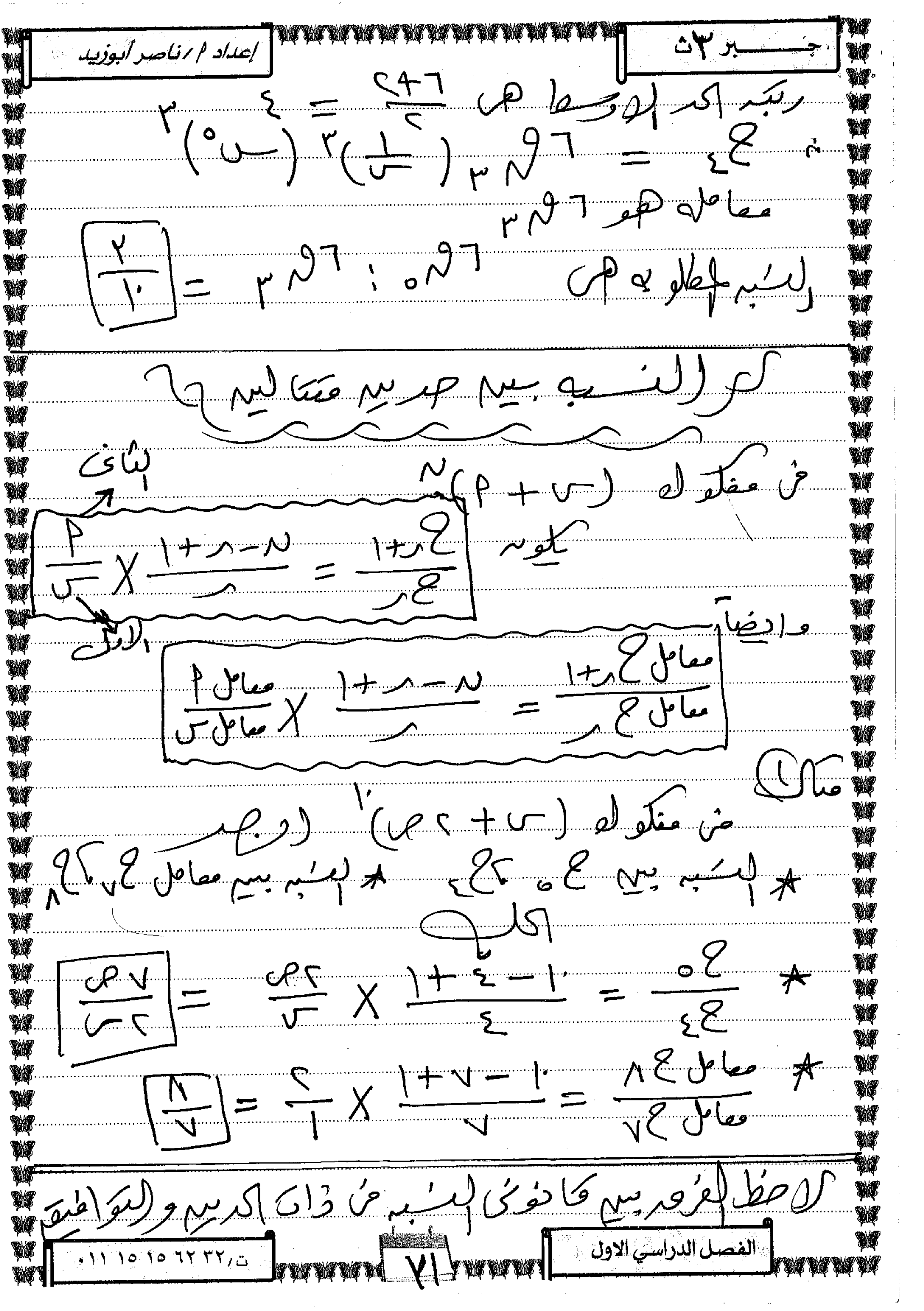
← $ك(٦ - ر) = ر$ ← $ك = \frac{ر}{٦ - ر}$

وحيث ان $٠ \leq ر \leq ٦$

∴ ر = ٣ ، ٤ ، ٥ والباقي مرفوض ٢.٢

∴ ك = ١ ، ك = ٢ ، ... ك = ٥ الأكبر

∴ المفكوك هو $\left(س^{٥} + \frac{١}{س}\right)^{٦}$ ح٦ هو الحد الخالي



رتبة الحد الأوسط هي $\frac{٦+٢}{٢} = ٤$

$\therefore$ $ح_٤ = {}^{٦}ق_٣ \left(\frac{١}{س}\right)^٣ (س^٥)^٣$

معامله هو ${}^{٦}ق_٣$

النسبة المطلوبة هي ${}^{٦}ق_٥ : {}^{٦}ق_٣ = \boxed{\frac{٢}{١٠}}$

النسبة بين حدين متتاليين

في مفكوك $(س + أ)^ن$ يكون

$$\frac{ح_{ر+١}}{ح_ر} = \frac{ن-ر+١}{ر} \times \frac{أ}{س}$$

(أ ← الثاني ، س ← الأول)

وأيضاً

$$\frac{معامل\ ح_{ر+١}}{معامل\ ح_ر} = \frac{ن-ر+١}{ر} \times \frac{معامل\ أ}{معامل\ س}$$

مثال (١)

في مفكوك $(س + ٢ص)^{١٠}$ أوجد

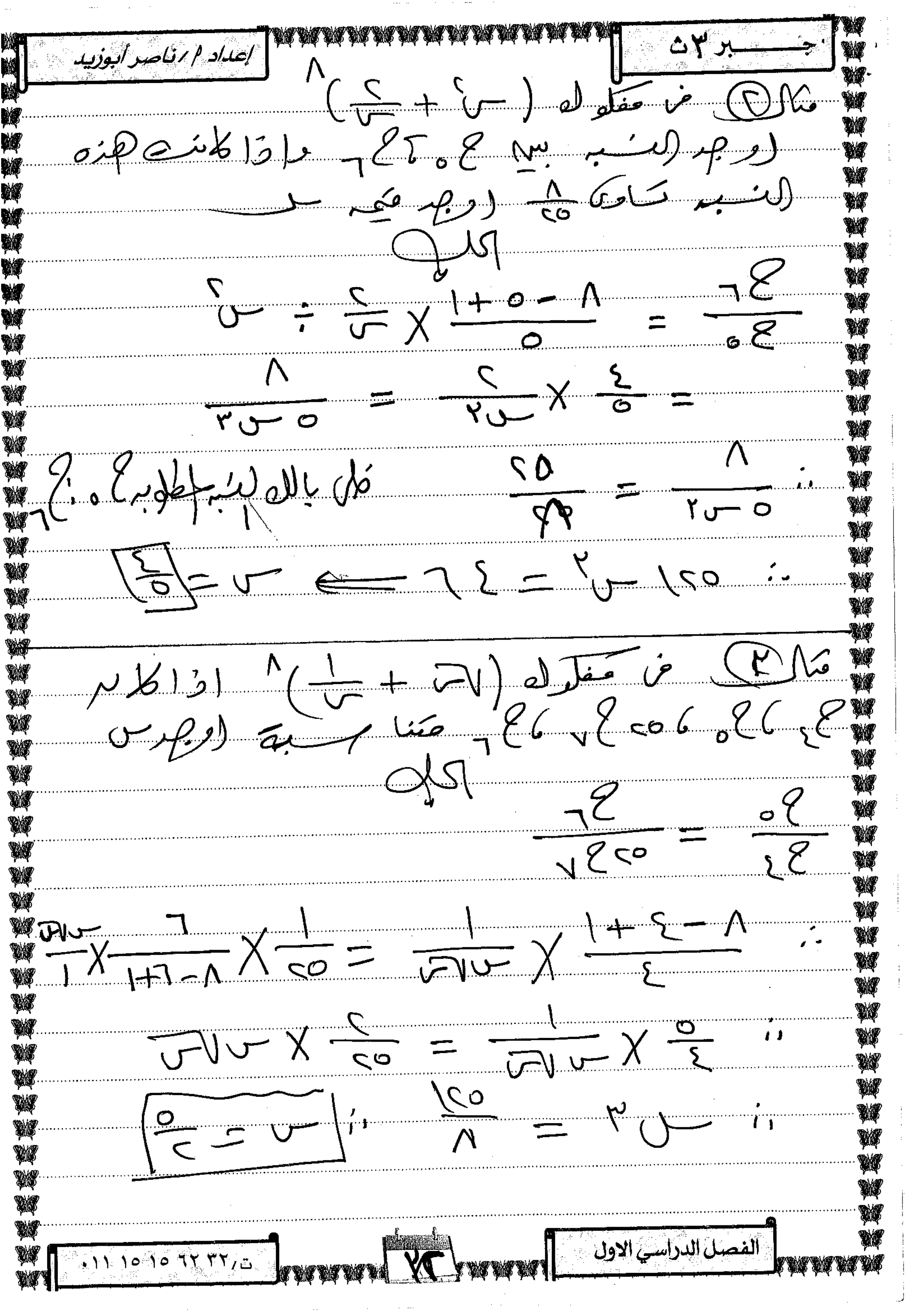
* النسبة بين $ح_٥$ ، $ح_٤$ * النسبة بين معامل $ح_٨$ ، $ح_٧$

الحل

* $\frac{ح_٥}{ح_٤} = \frac{١٠-٤+١}{٤} \times \frac{٢ص}{س} = \boxed{\frac{٧ص}{٢س}}$

* $\frac{معامل\ ح_٨}{معامل\ ح_٧} = \frac{١٠-٧+١}{٧} \times \frac{٢}{١} = \boxed{\frac{٨}{٧}}$

لاحظ الفرق بين قانون النسبة في ذات الحدين والتوافيق



مثال ⑤ في مفكوك $(س^٢ + \frac{٢}{س})^٨$

أوجد النسبة بين ح٦ ، ح٥ وإذا كانت هذه النسبة تساوي $\frac{٨}{٢٥}$ أوجد قيمة س

الحل

$$\frac{ح_٦}{ح_٥} = \frac{٨-٥+١}{٥} \times \frac{٢}{س} \div س^٢$$

$$= \frac{٤}{٥} \times \frac{٢}{س^٢} = \frac{٨}{٥س^٣}$$

$$\therefore \frac{٨}{٥س^٣} = \frac{٢٥}{٨}$$

(حل بقلب النسبة المطلوبة ح٥ : ح٦)

$$\therefore ١٢٥ س^٣ = ٦٤ \Leftarrow س = \frac{٤}{٥}$$

مثال ② في مفكوك $(\sqrt{س} + \frac{١}{س})^٨$ إذا كان ح٤ ، ح٥ ، ح٦ ، ح٧ متناسبة أوجد س

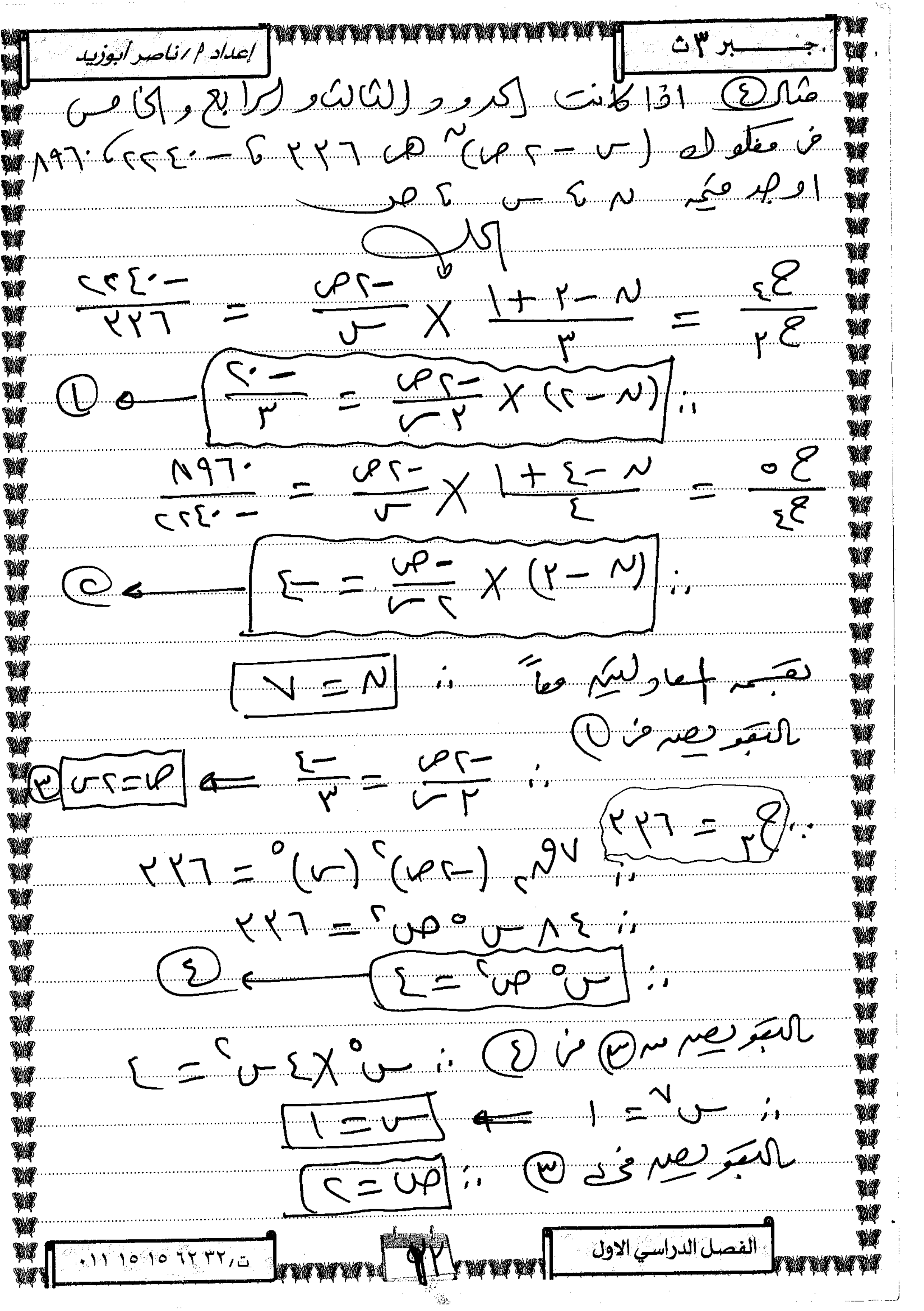
الحل

$$\frac{ح_٥}{ح_٤} = \frac{ح_٦}{٢٥ ح_٧}$$

$$\therefore \frac{٨-٤+١}{٤} \times \frac{١}{س\sqrt{س}} = \frac{١}{٢٥} \times \frac{٦}{٨-٦+١} \times \frac{س\sqrt{س}}{١}$$

$$\therefore \frac{٥}{٤} \times \frac{١}{س\sqrt{س}} = \frac{٢}{٢٥} \times س\sqrt{س}$$

$$\therefore س^٣ = \frac{١٢٥}{٨} \qquad \therefore س = \frac{٥}{٢}$$



إعداد أ/ ناصر أبوزيد

مثال (٤) اذا كانت الحدود الثالث و الرابع و الخامس في مفكوك $(س - ٢ص)^{ن}$ هي ٢٢٦ ، −٢٢٤٠ ، ٨٩٦٠

اوجد قيمة ن ، س ، ص

الحل

$\frac{ح_٤}{ح_٣} = \frac{ن - ٢ + ١}{٣} \times \frac{-٢ص}{س} = \frac{-٢٢٤٠}{٢٢٦}$

$\therefore (ن - ٢) \times \frac{-٢ص}{٣س} = \frac{-٢٠}{٣}$ ← (١)

$\frac{ح_٥}{ح_٤} = \frac{ن - ٤ + ١}{٤} \times \frac{-٢ص}{س} = \frac{٨٩٦٠}{-٢٢٤٠}$

$\therefore (ن - ٢) \times \frac{-ص}{٢س} = -٤$ ← (٢)

بقسمة المعادلتين معاً $\therefore ن = ٧$

بالتعويض في (١)

$\therefore \frac{-٢ص}{٣س} = \frac{-٤}{٣}$ ← $ص = ٢س$ (٣)

$\therefore ح_٣ = ٢٢٦$

$\therefore {}^{٧}ق_{٢} \, (-٢ص)^{٢} \, (س)^{٥} = ٢٢٦$

$\therefore ٨٤ \, س^{٥} ص^{٢} = ٢٢٦$

$\therefore س^{٥} ص^{٢} = ٤$ ← (٤)

بالتعويض من (٣) في (٤)

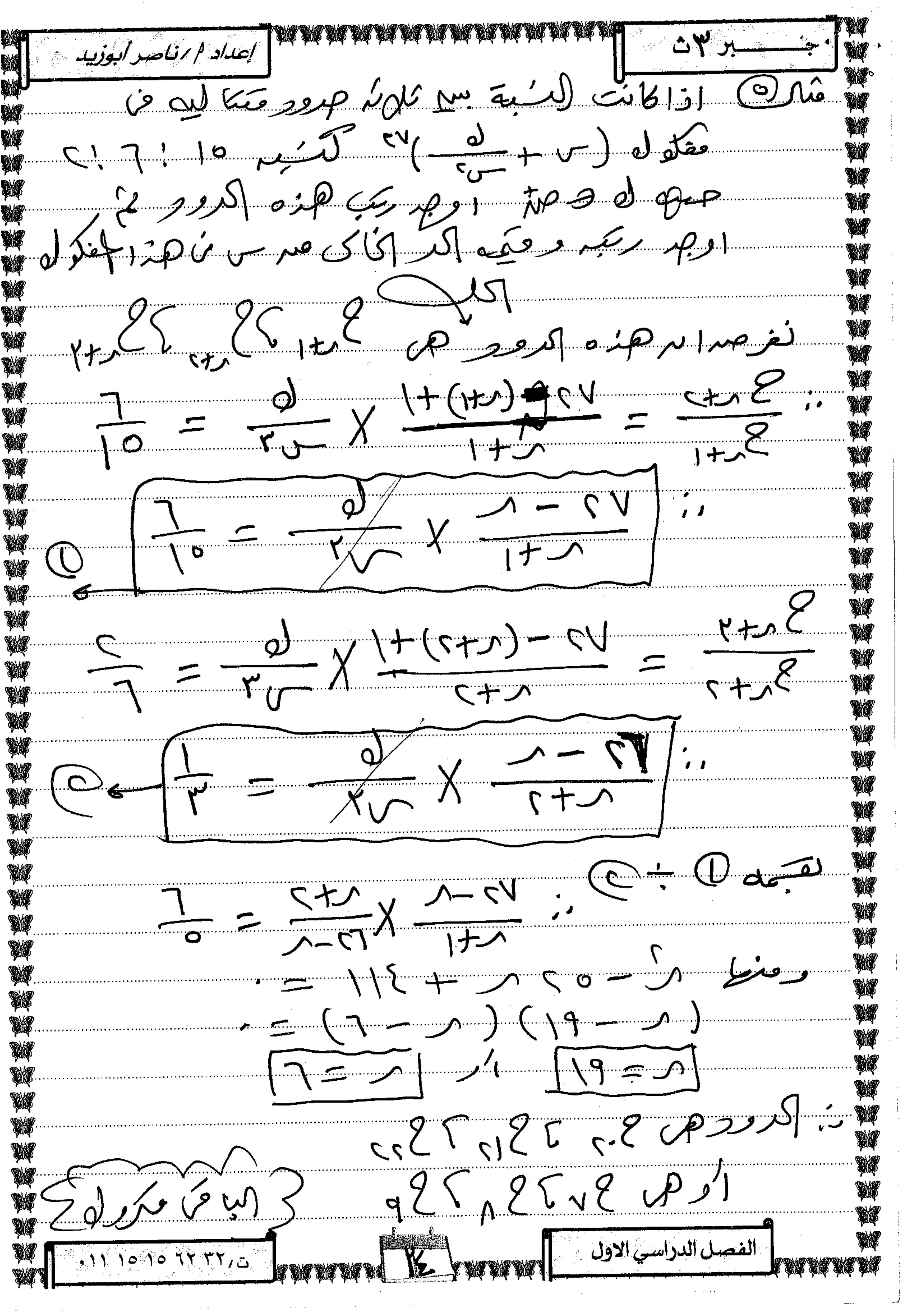
$\therefore س^{٥} \times ٤س^{٢} = ٤$

$\therefore س^{٧} = ١$ ← $س = ١$

بالتعويض في (٣)

$\therefore ص = ٢$

ت/ ٠١١١٥١٥٦٢٣٢



مثال (٥) اذا كانت النسبة بين ثلاثة حدود متتالية في مفكوك $\left(س + \frac{ك}{س^2}\right)^{27}$ كنسبة ١٥ : ٦ : ٢ حيث ك ∈ ص+ أوجد رتب هذه الحدود ثم أوجد رتبة وقيمة الحد الخالي من س من هذا المفكوك

الحل

نفرض ان هذه الحدود هي $ح_ر$ ، $ح_{ر+1}$ ، $ح_{ر+2}$

$$\because \frac{ح_{ر+1}}{ح_ر} = \frac{27-(ر+1)+1}{ر+1} \times \frac{ك}{س^3} = \frac{6}{15}$$

$$\therefore \frac{27-ر}{ر+1} \times \frac{ك}{س^3} = \frac{6}{15} \quad (1)$$

$$\frac{ح_{ر+2}}{ح_{ر+1}} = \frac{27-(ر+2)+1}{ر+2} \times \frac{ك}{س^3} = \frac{2}{6}$$

$$\therefore \frac{26-ر}{ر+2} \times \frac{ك}{س^3} = \frac{1}{3} \quad (2)$$

بقسمة (1) ÷ (2)

$$\therefore \frac{27-ر}{ر+1} \times \frac{ر+2}{26-ر} = \frac{6}{5}$$

ومنها $ر^2 - 25ر + 114 = 0$

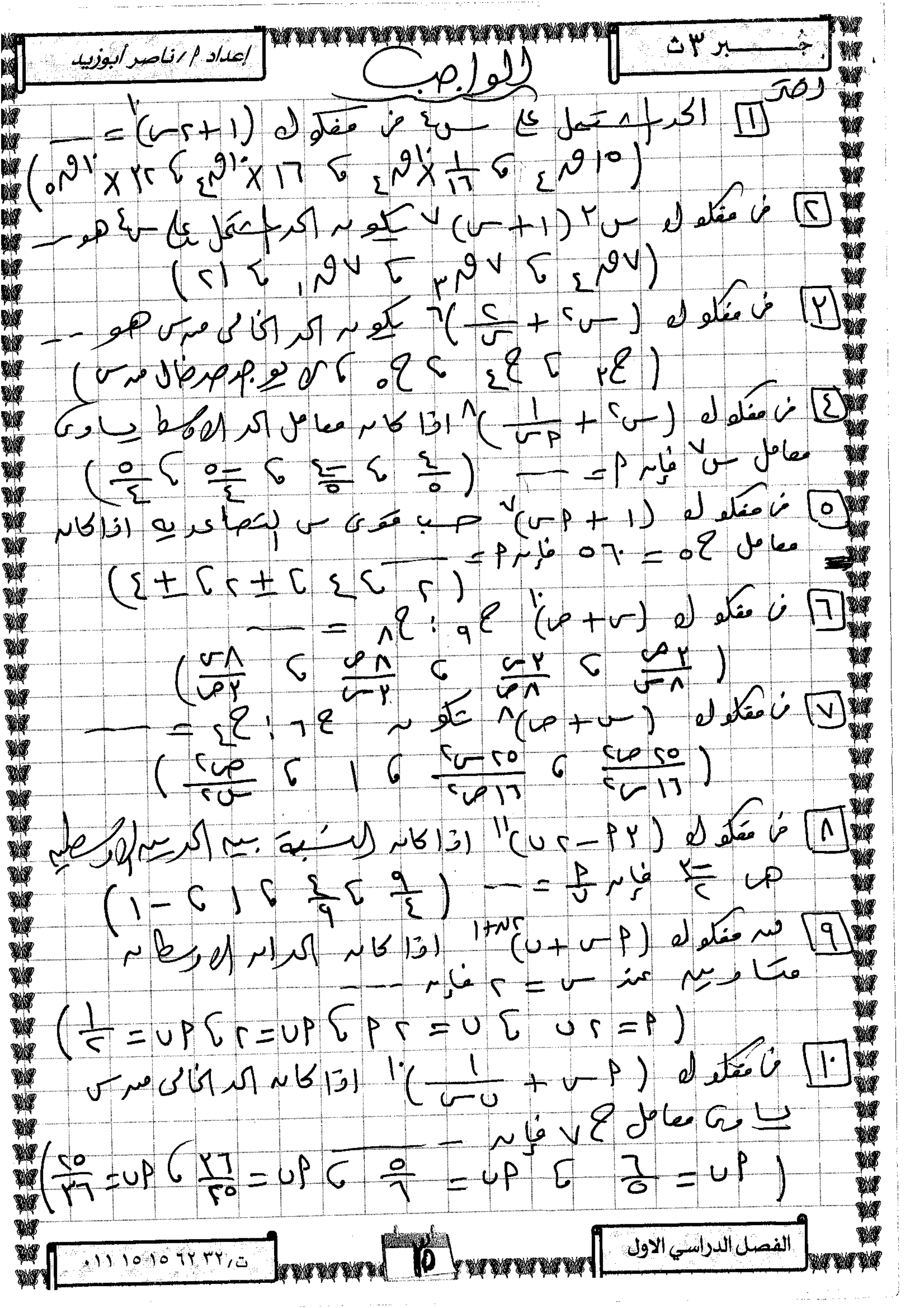
$(ر - 19)(ر - 6) = 0$

ر = 19 أو ر = 6

∴ الحدود هي $ح_{19}$ ، $ح_{20}$ ، $ح_{21}$

أو هي $ح_7$ ، $ح_8$ ، $ح_9$

الباقي مكرر



إعداد أ/ ناصر أبوزيد

الواجب

اختر

1. الحد المشتمل على $س^4$ في مفكوك $(1+2س)^{10}$ = ___
(١٥ ق٤ ، $\frac{1}{16}$ × ١٠ق٤ ، ١٦ × ١٠ق٤ ، ٣٢ × ١٠ق٥)

2. في مفكوك $س^2(1+س)^7$ يكون الحد المشتمل على $س^4$ هو ___
(٧ق٤ ، ٧ق٣ ، ٧ق١ ، ٢١)

3. في مفكوك $(س^2+\frac{2}{س})^6$ يكون الحد الخالي من س هو ___
(ح٣ ، ح٤ ، ح٥ ، لا يوجد حد خالي من س)

4. في مفكوك $(س^2+\frac{1}{أس})^8$ إذا كان معامل الحد الأوسط يساوي معامل $س^7$ فإن أ = ___
($\frac{2}{5}$ ، $\pm\frac{2}{5}$ ، $\pm\frac{5}{4}$ ، $\frac{5}{4}$)

5. في مفكوك $(1+أس)^7$ حسب قوى س التصاعدية إذا كان معامل ح٥ = ٥٦٠ فإن أ = ___
(٢ ، ٤ ، ±٢ ، ±٤)

6. في مفكوك $(س+ص)^{10}$ ح٩ : ح٨ = ___
($\frac{2ص}{8س}$ ، $\frac{2س}{8ص}$ ، $\frac{8ص}{2س}$ ، $\frac{8س}{2ص}$)

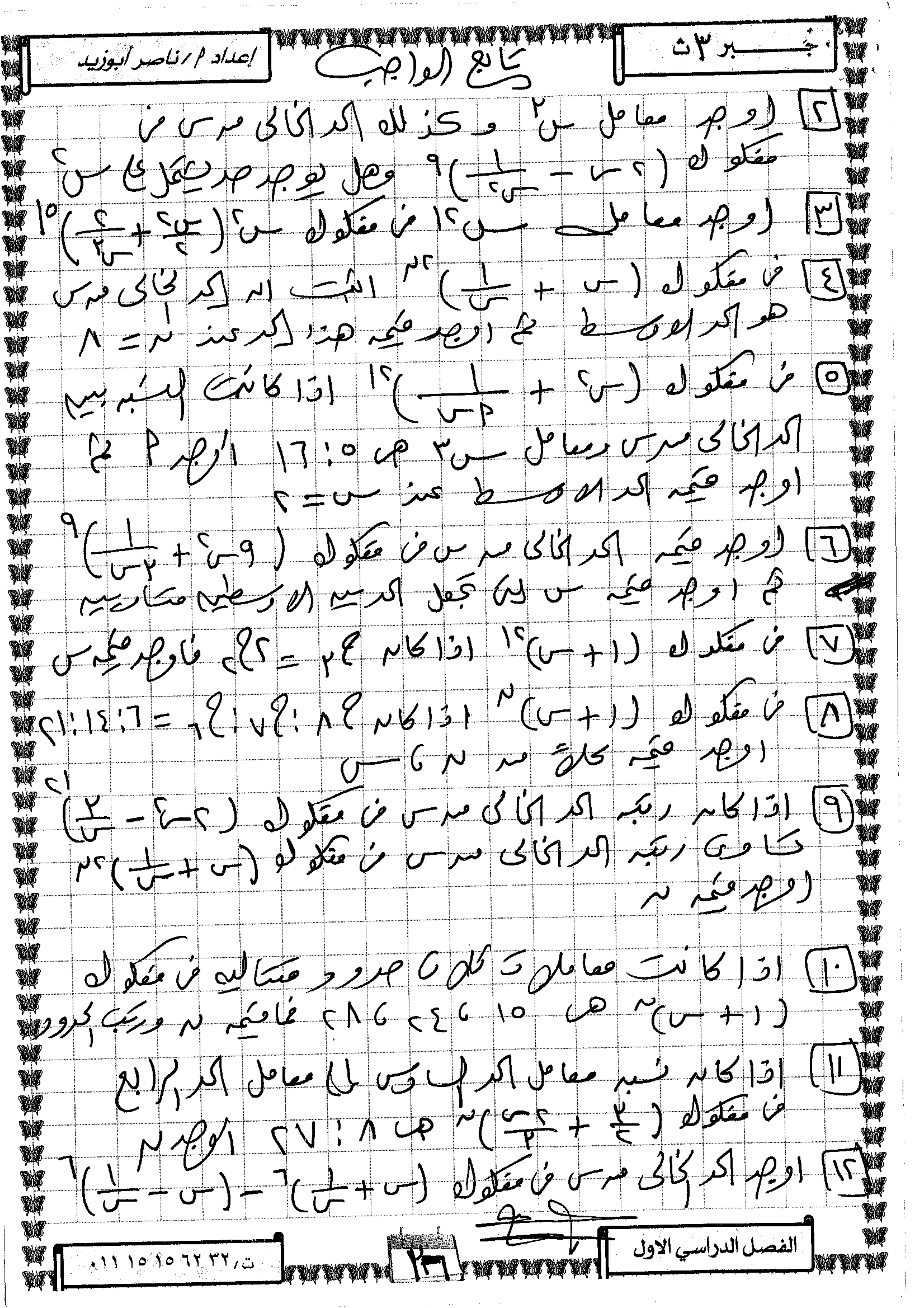
7. في مفكوك $(س+ص)^8$ يكون ح٦ : ح٤ = ___
($\frac{25ص^2}{16س^2}$ ، $\frac{25س^2}{16ص^2}$ ، ١ ، $\frac{ص^2}{س^2}$)

8. في مفكوك $(2أ-3ب)^{11}$ إذا كانت النسبة بين الحدين الأوسطين $= -\frac{2}{3}$ فإن $\frac{أ}{ب}$ = ___
($\frac{9}{4}$ ، $\frac{4}{9}$ ، ١ ، −١)

9. في مفكوك $(أس+ب)^{2ن+1}$ إذا كان الحدان الأوسطان متساويين عند س = ٢ فإن ___
(أ = ٢ب ، ب = ٢أ ، أب = ٢ ، أب = $\frac{1}{2}$)

10. في مفكوك $(أس+\frac{1}{بس})^{10}$ إذا كان الحد الخالي من س يساوي معامل ح٧ فإن ___
(أب = $\frac{6}{5}$ ، أب = $\frac{5}{6}$ ، أب = $\frac{26}{25}$ ، أب = $\frac{25}{36}$)

ت/ ٠١١١٥١٥٦٢٣٢



تابع الواجب

إعداد أ/ ناصر أبوزيد

[٢] أوجد معامل $س^2$ وكذلك الحد الخالي من س من مفكوك $\left(2س - \frac{1}{س^2}\right)^9$ وهل يوجد حد يحتوي على س؟

[٣] أوجد معامل $س^{12}$ من مفكوك $\left(\frac{س^2}{2} + \frac{2}{س^2}\right)^{15}$

[٤] من مفكوك $\left(س + \frac{1}{س}\right)^{2ن}$ أثبت أن الحد الخالي من س هو الحد الأوسط ثم أوجد قيمة هذا الحد عند ن = ٨

[٥] من مفكوك $\left(س^2 + \frac{1}{أس}\right)^{12}$ إذا كانت النسبة بين الحد الخالي من س ومعامل $س^3$ هي ٥ : ١٦ أوجد أ ثم أوجد قيمة الحد الأوسط عند س = ٢

[٦] أوجد قيمة الحد الخالي من س من مفكوك $\left(9س^2 + \frac{1}{3س}\right)^9$ ثم أوجد قيمة س التي تجعل الحدين الأوسطين متساويين

[٧] من مفكوك $(1 + س)^{12}$ إذا كان $ح_2 = 2ح_3$ فأوجد قيمة س

[٨] من مفكوك $(1 + س)^ن$ إذا كان $ح_8 : ح_7 : ح_6 = 21 : 14 : 6$ أوجد قيمة كلاً من ن ، س

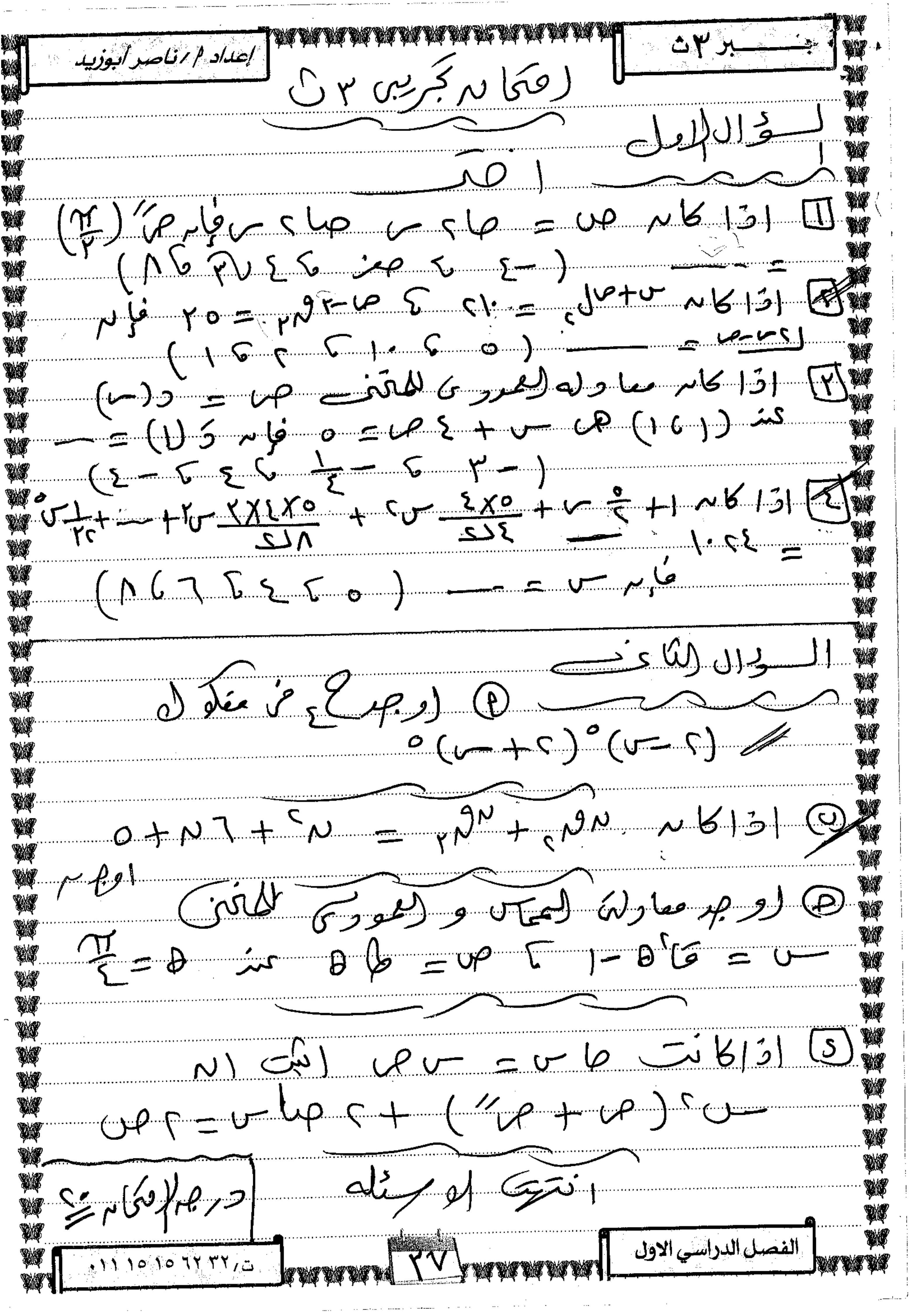
[٩] إذا كانت رتبة الحد الخالي من س من مفكوك $\left(2س^2 - \frac{2}{س}\right)^{21}$ تساوي رتبة الحد الخالي من س من مفكوك $\left(س + \frac{1}{س}\right)^{2ن}$ أوجد قيمة ن

[١٠] إذا كانت معاملات ثلاثة حدود متتالية من مفكوك $(1 + س)^ن$ هي ١٥ ، ٤٢ ، ٨٤ فما قيمة ن ورتب الحدود

[١١] إذا كانت نسبة معامل الحد الخالي من س إلى معامل الحد الرابع من مفكوك $\left(\frac{2}{س} + \frac{س^2}{3}\right)^ن$ هي ٨ : ٢٧ أوجد ن

[١٢] أوجد الحد الخالي من س من مفكوك $\left(س + \frac{1}{س}\right)^6 - \left(س - \frac{1}{س}\right)^6$

ت/ ٠١١١٥١٥٦٢٣٢



إعداد م/ ناصر أبوزيد

امتحان تجريبي ٣ ث

السؤال الأول

أ) اختر

١) إذا كان ص = جا ٢س جا ٢س فإن ص″ $(\frac{\pi}{2})$ = ___ (−٤ ، صفر ، ٤ ، ٢π ، ٨)

٢) إذا كان $^{س+ص}ل_ص$ = ٢١٠ ، $^{ص}ق_{٣−}$ = ٢٥ فإن $^{٢س}ق_ص$ = ___ (٥ ، ١٠ ، ٢ ، ١)

٣) إذا كانت معادلة العمودي للمنحنى ص = د(س) عند (١ ، ١) هي س + ٤ص = ٥ فإن د′(١) = ___ (−٣ ، $-\frac{1}{4}$ ، ٤ ، −٤)

٤) إذا كان ١ + $\frac{٥}{٢}$س + $\frac{٥\times٤}{٢!٤}$س² + $\frac{٥\times٤\times٢}{٨!}$س³ + ... + $\frac{١}{٣٢}$س⁵ = ١٠٢٤ فإن س = ___ (٥ ، ٤ ، ٦ ، ٨)

السؤال الثاني

أ) أوجد ح٤ من مفكوك (٢ − س)⁵ (٢ + س)⁵

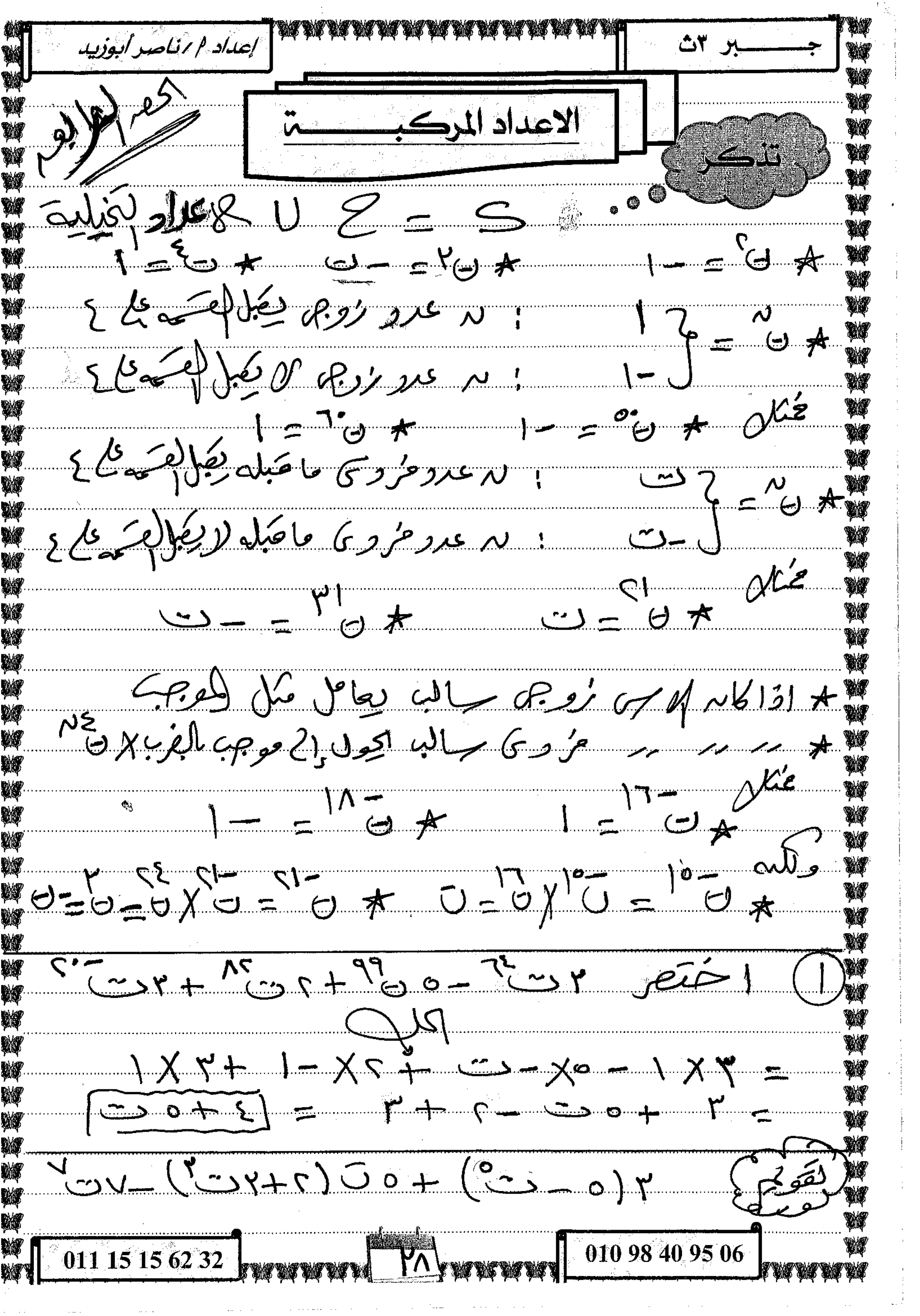
ب) إذا كان $^{ن}ق_٢$ + $^{ن}ق_٢$ = ن² + ٦ن + ٥ أوجد ن

ج) أوجد معادلة المماس والعمودي للمنحنى س = قا²θ − ١ ، ص = ظا θ عند θ = $\frac{\pi}{4}$

د) إذا كانت ظا س = س ص أثبت أن س² (ص + ص″) + ٢ جا س = ٢ ص

انتهت الأسئلة

درجة الامتحان ٢٥



إعداد م/ ناصر أبوزيد

الاعداد المركبة

تذكر

الحصة الرابعة

ك = ح ∪ الأعداد التخيلية

* $ت^2 = -1$ * $ت^3 = -ت$ * $ت^4 = 1$

* $ت^ن = 1$: ن عدد زوجي يقبل القسمة على ٤
  $ت^ن = -1$: ن عدد زوجي لا يقبل القسمة على ٤

مثال * $ت^{50} = -1$ * $ت^{60} = 1$

* $ت^ن = ت$: ن عدد فردي ما قبله يقبل القسمة على ٤
  $ت^ن = -ت$: ن عدد فردي ما قبله لا يقبل القسمة على ٤

مثال * $ت^{21} = ت$ * $ت^{31} = -ت$

* اذا كان الأس زوجي سالب يعامل مثل الموجب
* " " " فردي سالب نحوله إلى موجب بالضرب × $ت^{4ن}$

مثال * $ت^{-16} = 1$ * $ت^{-18} = -1$

ولكن * $ت^{-15} = ت^{-15} \times ت^{16} = ت$ * $ت^{-21} = ت^{-21} \times ت^{24} = ت^3 = -ت$

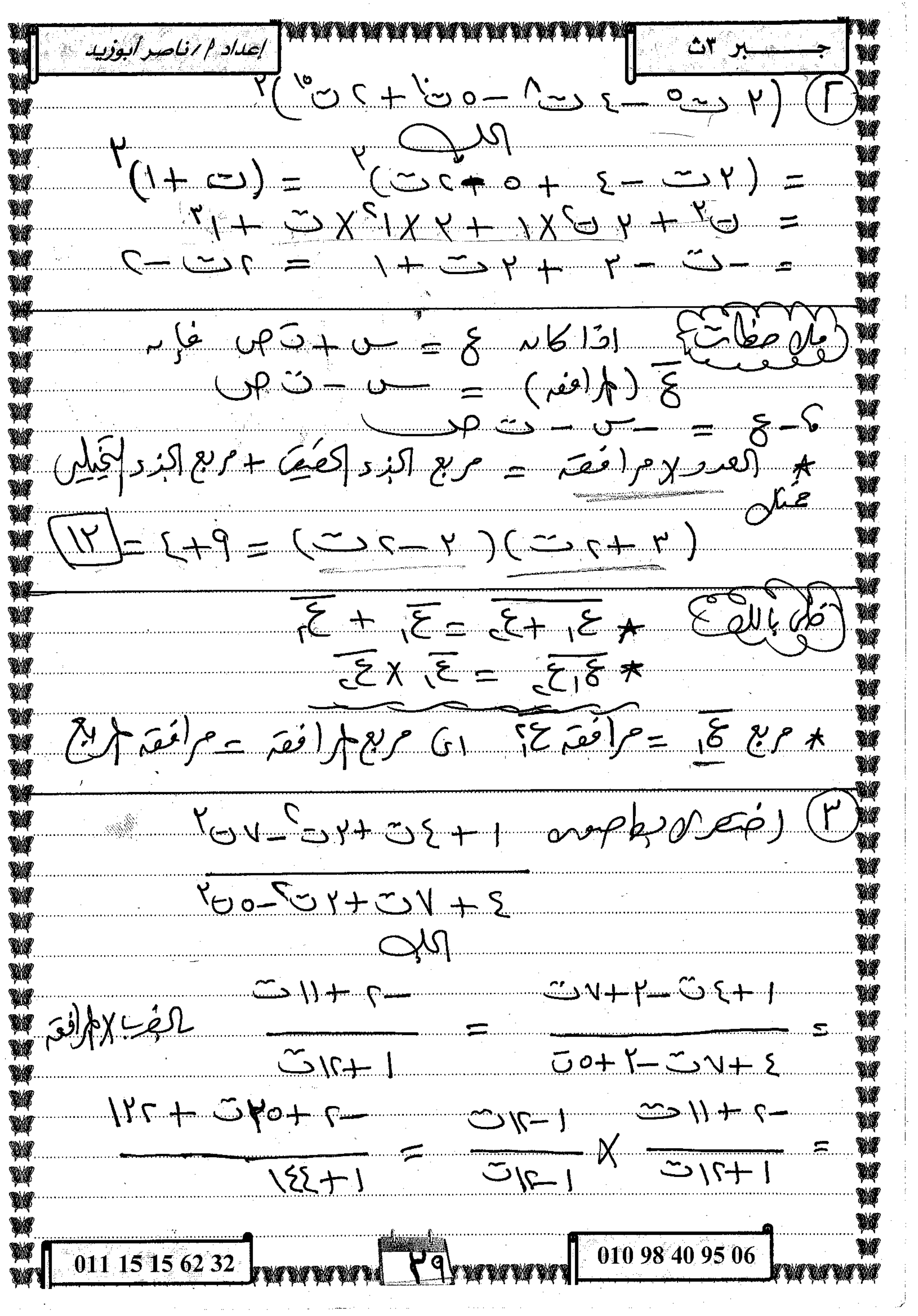
(١) اختصر $3ت^{64} - 5ت^{99} + 2ت^{82} + 3ت^{-20}$

الحل

$= 3 \times 1 - 5 \times -ت + 2 \times -1 + 3 \times 1$

$= 3 + 5ت - 2 + 3 = \boxed{4 + 5ت}$

تقويم: $3(5 - ت^5) + 5ت(2 + 2ت^3) - 7ت^7$



(٢) $(٢ت^{٥} - ٤ت^{٨} - ٥ت^{٦} + ٢ت^{١٥})^{٢}$

الحل

$= (٢ت - ٤ + ٥ - ٢ت)^{٢} = (ت + ١)^{٣}$

$= ت^{٣} + ٣ت^{٢} \times ١ + ٣ \times ١^{٢} \times ت + ١^{٣}$

$= -ت - ٣ + ٣ت + ١ = ٢ت - ٢$

ملاحظات: إذا كان $ع = س + ت ص$ فإن

$\overline{ع}$ (المرافق) $= س - ت ص$

$-ع = -س - ت ص$

* العدد × مرافقه = مربع الجزء الحقيقي + مربع الجزء التخيلي

مثل: $(٣ + ٢ت)(٣ - ٢ت) = ٩ + ٤ = ١٢$

لاحظ بالله

* $\overline{ع_{١} + ع_{٢}} = \overline{ع_{١}} + \overline{ع_{٢}}$

* $\overline{ع_{١} ع_{٢}} = \overline{ع_{١}} \times \overline{ع_{٢}}$

* مربع $\overline{ع}$ = مرافق $ع^{٢}$ أي مربع المرافق = مرافق المربع

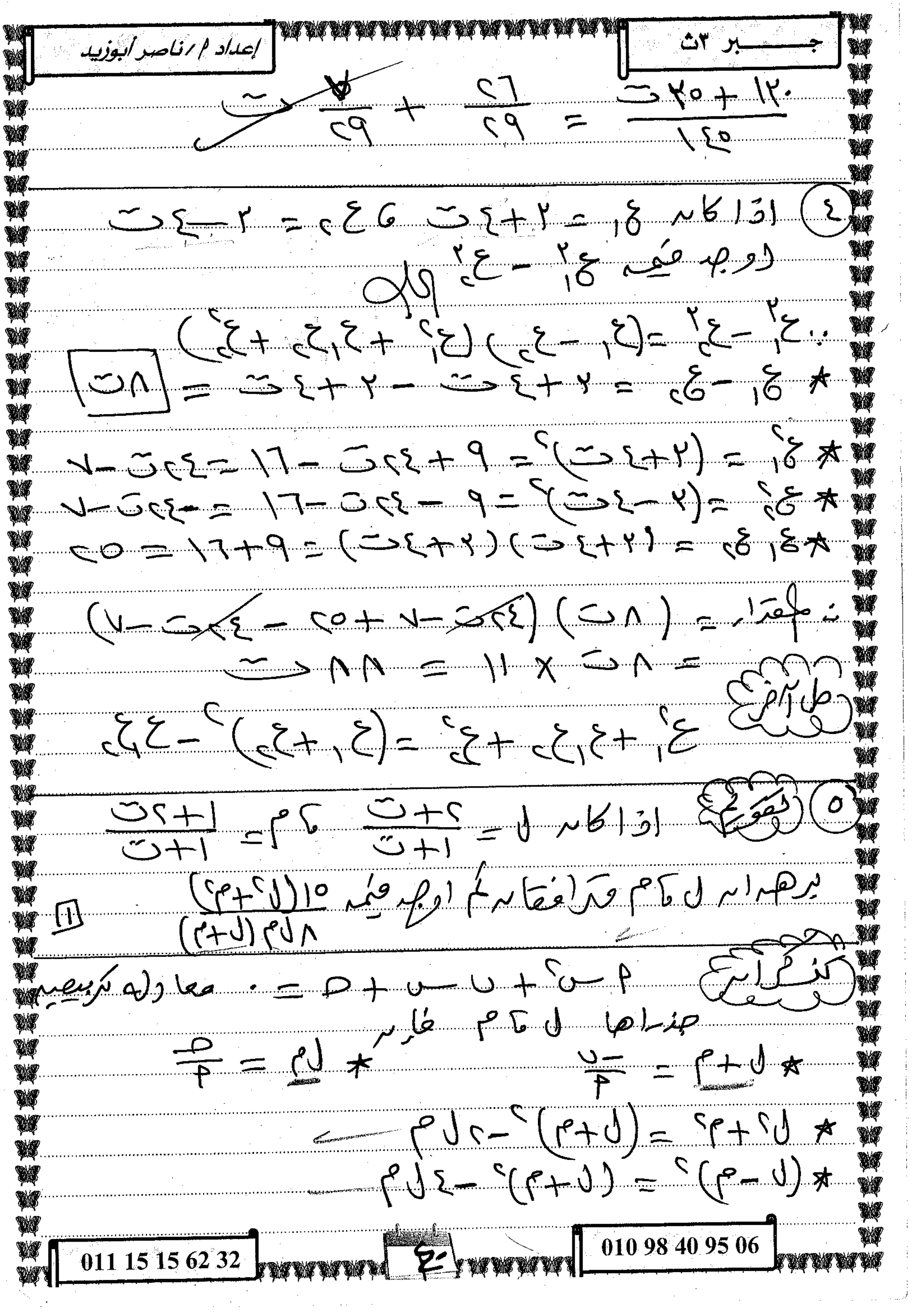
---

(٣) ضع في أبسط صورة $\frac{١ + ٤ت + ٢ت^{٢} - ٧ت^{٣}}{٤ + ٧ت + ٢ت^{٢} - ٥ت^{٣}}$

الحل

$= \frac{١ + ٤ت - ٢ + ٧ت}{٤ + ٧ت - ٢ + ٥ت} = \frac{-١ + ١١ت}{١ + ١٢ت}$ بالضرب × المرافق

$= \frac{-١ + ١١ت}{١ + ١٢ت} \times \frac{١ - ١٢ت}{١ - ١٢ت} = \frac{-١ + ٢٣ت + ١٣٢}{١ + ١٤٤}$



$\frac{١٢٠ + ٢٥ت}{١٤٥} = \frac{٢٦}{٢٩} + \frac{٧}{٢٩}ت$

---

(٤) إذا كان $ع_1 = ٣ + ٤ت$ ، $ع_2 = ٣ - ٤ت$

أوجد قيمة $ع_1^3 - ع_2^3$

الحل

$\because ع_1^3 - ع_2^3 = (ع_1 - ع_2)(ع_1^2 + ع_1 ع_2 + ع_2^2)$

* $ع_1 - ع_2 = ٣ + ٤ت - ٣ + ٤ت = \boxed{٨ت}$

* $ع_1^2 = (٣ + ٤ت)^2 = ٩ + ٢٤ت - ١٦ = ٢٤ت - ٧$
* $ع_2^2 = (٣ - ٤ت)^2 = ٩ - ٢٤ت - ١٦ = -٢٤ت - ٧$
* $ع_1 ع_2 = (٣ + ٤ت)(٣ - ٤ت) = ٩ + ١٦ = ٢٥$

$\therefore$ المقدار $= (٨ت)(٢٤ت - ٧ + ٢٥ - ٢٤ت - ٧)$

$= ٨ت \times ١١ = ٨٨ت$

ط٢

$ع_1^2 + ع_1 ع_2 + ع_2^2 = (ع_1 + ع_2)^2 - ع_1 ع_2$

---

(٥) تصور

إذا كان $ل = \frac{٢ + ت}{١ + ت}$ ، $م = \frac{١ + ٢ت}{١ + ت}$

برهن أن ل ، م مترافقان ثم أوجد قيمة $\frac{١٥(ل^2 + م^2)}{٨ ل م (ل + م)}$ $\boxed{١}$

تذكر أن

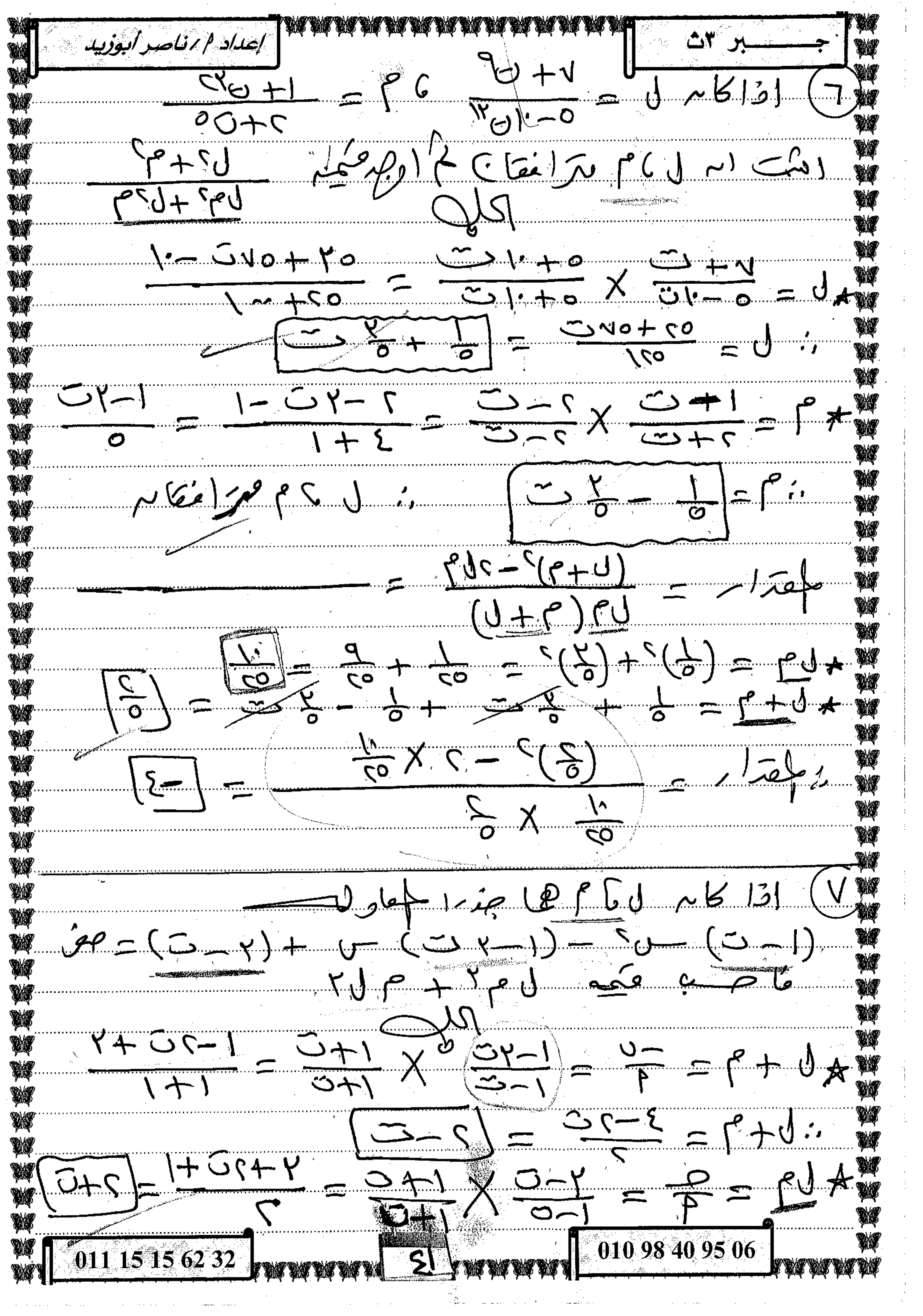
$أ س^2 + ب س + حـ = ٠$ معادلة تربيعية

جذراها ل ، م فإن

* $ل + م = \frac{-ب}{أ}$ * $ل م = \frac{حـ}{أ}$

* $ل^2 + م^2 = (ل + م)^2 - ٢ ل م$

* $(ل - م)^2 = (ل + م)^2 - ٤ ل م$



(٦) إذا كان $ل = \frac{٧ + ت}{٥ - ١٠ت}$ ، $م = \frac{١ - ت}{٢ + ت}$

اثبت أن ل ، م مترافقان ثم أوجد قيمة $\frac{ل^٢ + م^٢}{ل م^٢ + ل^٢ م}$

الحل

* $ل = \frac{٧ + ت}{٥ - ١٠ت} \times \frac{٥ + ١٠ت}{٥ + ١٠ت} = \frac{٣٥ + ٧٥ت - ١٠}{٢٥ + ١٠٠}$

$\therefore ل = \frac{٢٥ + ٧٥ت}{١٢٥} = \boxed{\frac{١}{٥} + \frac{٣}{٥}ت}$

* $م = \frac{١ - ت}{٢ + ت} \times \frac{٢ - ت}{٢ - ت} = \frac{٢ - ت - ٢ت - ١}{٤ + ١} = \frac{١ - ٣ت}{٥}$

$\therefore م = \boxed{\frac{١}{٥} - \frac{٣}{٥}ت}$ $\therefore$ ل ، م مترافقان

المقدار $= \frac{(ل + م)^٢ - ٢ل م}{ل م (م + ل)} =$ ____________

* $ل م = (\frac{١}{٥})^٢ + (\frac{٣}{٥})^٢ = \frac{١}{٢٥} + \frac{٩}{٢٥} = \boxed{\frac{١٠}{٢٥}}$
* $ل + م = \frac{١}{٥} + \frac{٣}{٥}ت + \frac{١}{٥} - \frac{٣}{٥}ت = \boxed{\frac{٢}{٥}}$

$\therefore$ المقدار $= \frac{(\frac{٢}{٥})^٢ - ٢ \times \frac{١٠}{٢٥}}{\frac{١٠}{٢٥} \times \frac{٢}{٥}} = \boxed{-٤}$

(٧) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة

$(١ - ت) س^٢ - (١ - ٣ت) س + (٢ - ت) = صفر$

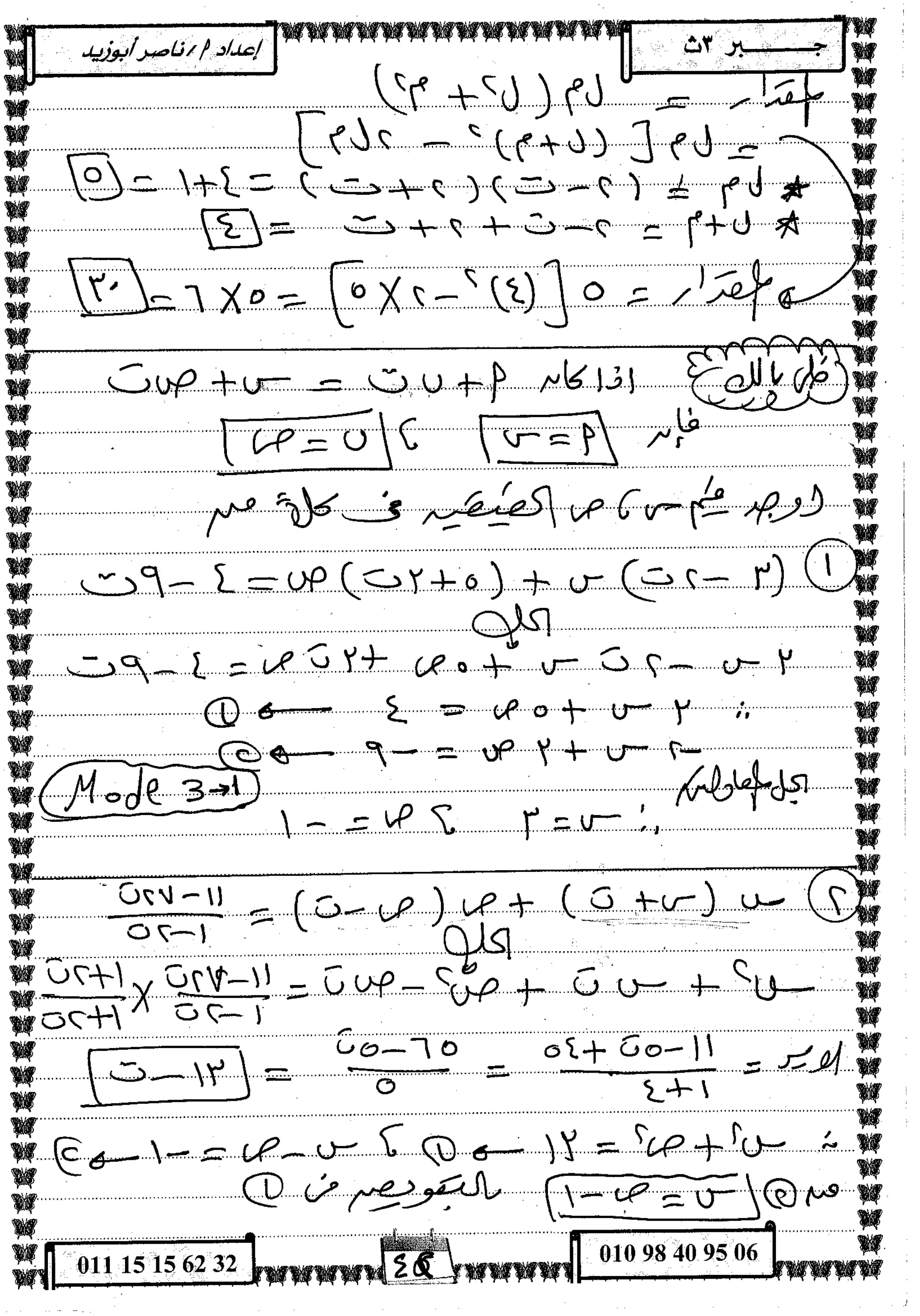
فأوجد قيمة $ل م^٢ + م ل^٢$

الحل

* $ل + م = \frac{-ب}{أ} = \frac{١ - ٣ت}{١ - ت} \times \frac{١ + ت}{١ + ت} = \frac{١ - ٣ت + ت + ٣}{١ + ١}$

$\therefore ل + م = \frac{٤ - ٢ت}{٢} = \boxed{٢ - ت}$

* $ل م = \frac{جـ}{أ} = \frac{٢ - ت}{١ - ت} \times \frac{١ + ت}{١ + ت} = \frac{٢ + ٢ت - ت + ١}{٢} = \boxed{٢ + ت}$



المقدار = ل م (ل² + م²)

= ل م [(ل + م)² − ٢ ل م]

* ل م = (٢ − ت)(٢ + ت) = ٤ + ١ = **٥**
* ل + م = ٢ − ت + ٢ + ت = **٤**

∴ المقدار = ٥ [(٤)² − ٢ × ٥] = ٥ × ٦ = **٣٠**

خلي بالك

إذا كان أ + ب ت = س + ص ت

فإن **أ = س** ، **ب = ص**

اوجد قيم س ، ص الحقيقية في كل مما يأتي

(١) (٣ − ٢ت) س + (٥ + ٢ت) ص = ٤ − ٩ت

الحل

٣ س − ٢ ت س + ٥ ص + ٢ ت ص = ٤ − ٩ت

∴ ٣ س + ٥ ص = ٤ ⟵ (١)

−٢ س + ٢ ص = −٩ ⟵ (٢)

Mode 3→1 بحل المعادلتين

∴ س = ٣ ، ص = −١

---

(٢) س (س + ت) + ص (ص − ت) = (١١ − ٧ت)/(١ − ٢ت)

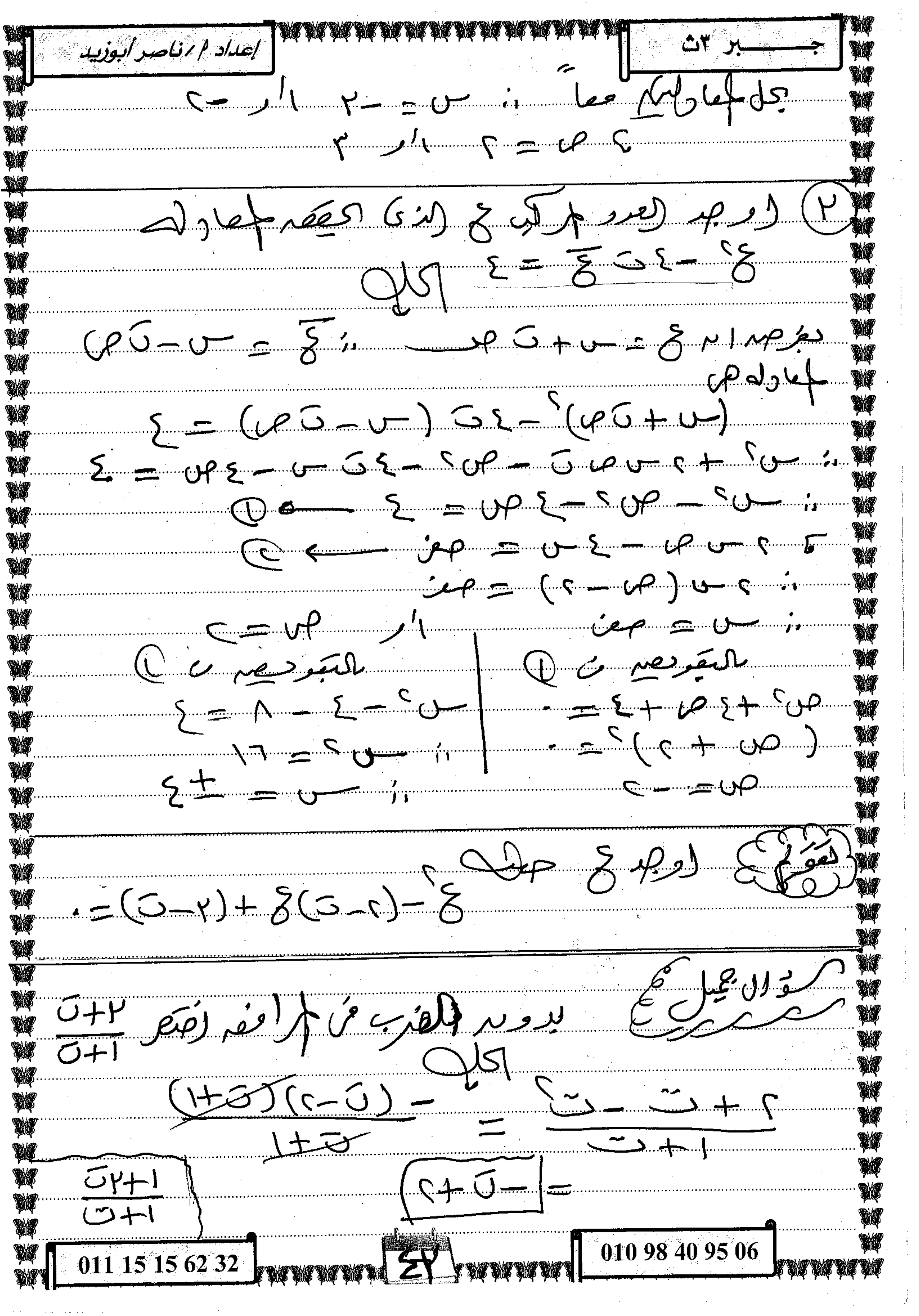
الحل

س² + س ت + ص² − ص ت = (١١ − ٧ت)/(١ − ٢ت) × (١ + ٢ت)/(١ + ٢ت)

الأيسر = (١١ − ٥ت + ٥٤)/(١ + ٤) = (٦٥ − ٥ت)/٥ = **١٣ − ت**

∴ س² + ص² = ١٣ ⟵ (١) ، س − ص = −١ ⟵ (٢)

من (٢) **س = ص − ١** بالتعويض في (١)



بحل المعادلتين معاً ∴ س = −٢ ، ١ ، −٢

ص = ٢ ، ١ ، ٣

(٢) أوجد العدد المركب ع الذي يحقق المعادلة

$ع^2 - 4ت\bar{ع} = 4$

الحل

بفرض أن ع = س + ت ص ∴ $\bar{ع}$ = س − ت ص

المعادلة هي

$(س + ت ص)^2 - 4ت(س - ت ص) = 4$

∴ $س^2 + 2 س ص ت - ص^2 - 4 ت س - 4 ص = 4$

∴ $س^2 - ص^2 - 4ص = 4$ ← (١)

، $2 س ص - 4 س = صفر$ ← (٢)

∴ ٢ س (ص − ٢) = صفر

∴ س = صفر أو ص = ٢

بالتعويض في (١)	بالتعويض في (١)
$ص^2 + 4ص + 4 = 0$	$س^2 - 4 - 8 = 4$
$(ص + 2)^2 = 0$	∴ $س^2 = 16$
ص = −٢	∴ س = ±٤

تقويم: أوجد ع حل

$ع^2 - ع(2 - ت) + (2 - ت) = 0$

سؤال جميل

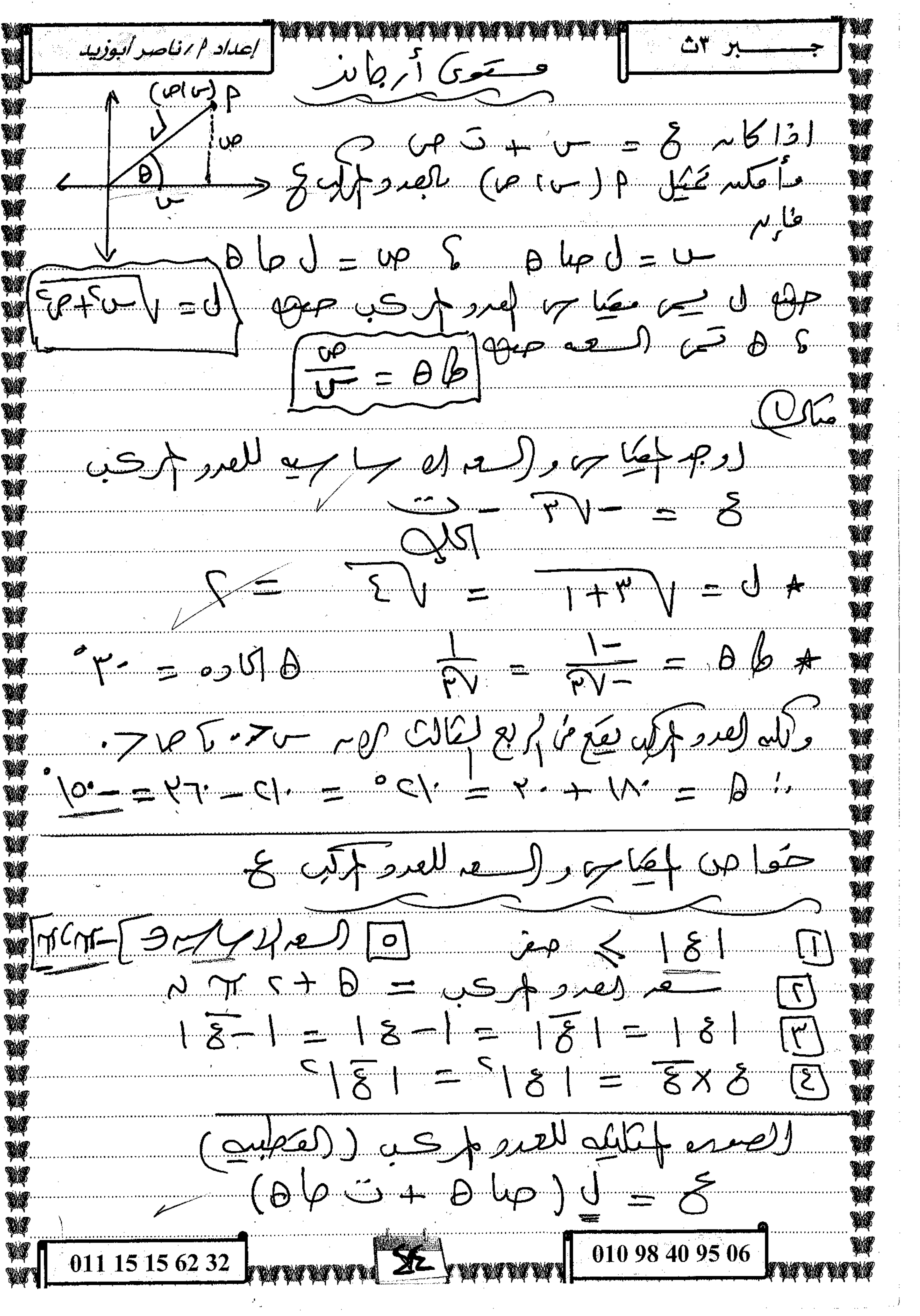
بدون الضرب في المرافق أوجد أصغر $\frac{2 + ت}{1 + ت}$

الحل

$\frac{2 + ت - ت^2}{1 + ت} = \frac{-(ت - 2)(ت + 1)}{1 + ت}$

$= -ت + 2$

$\frac{1 + 2ت}{1 + ت}$



إعداد م/ ناصر أبوزيد

مستوى أرجاند

إذا كان $ع = س + ت ص$

فأمكن تمثيل م (س، ص) بالعدد المركب ع

فإن

$س = ل \, جتا \, \theta$ ، $ص = ل \, جا \, \theta$

حيث ل يسمى مقياس العدد المركب حيث $ل = \sqrt{س^2 + ص^2}$

، θ قياس السعة حيث $ظا \, \theta = \frac{ص}{س}$

مثال ①

أوجد المقياس والسعة الأساسية للعدد المركب

$ع = -\sqrt{3} - ت$

الحل

* $ل = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$

* $ظا \, \theta = \frac{-1}{-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ، θ الحادة = $30°$

وكان العدد المركب يقع في الربع الثالث لأن س سالب، ص سالب.

$\therefore \theta = 180° + 30° = 210° = 210 - 360 = -150°$

خواص المقياس والسعة للعدد المركب ع

① $|ع| \geq$ صفر

⑤ السعة الأساسية $\in]-\pi ، \pi]$

② سعة العدد المركب $= \theta + 2\pi ن$

③ $|ع| = |\bar{ع}| = |-ع| = |-\bar{ع}|$

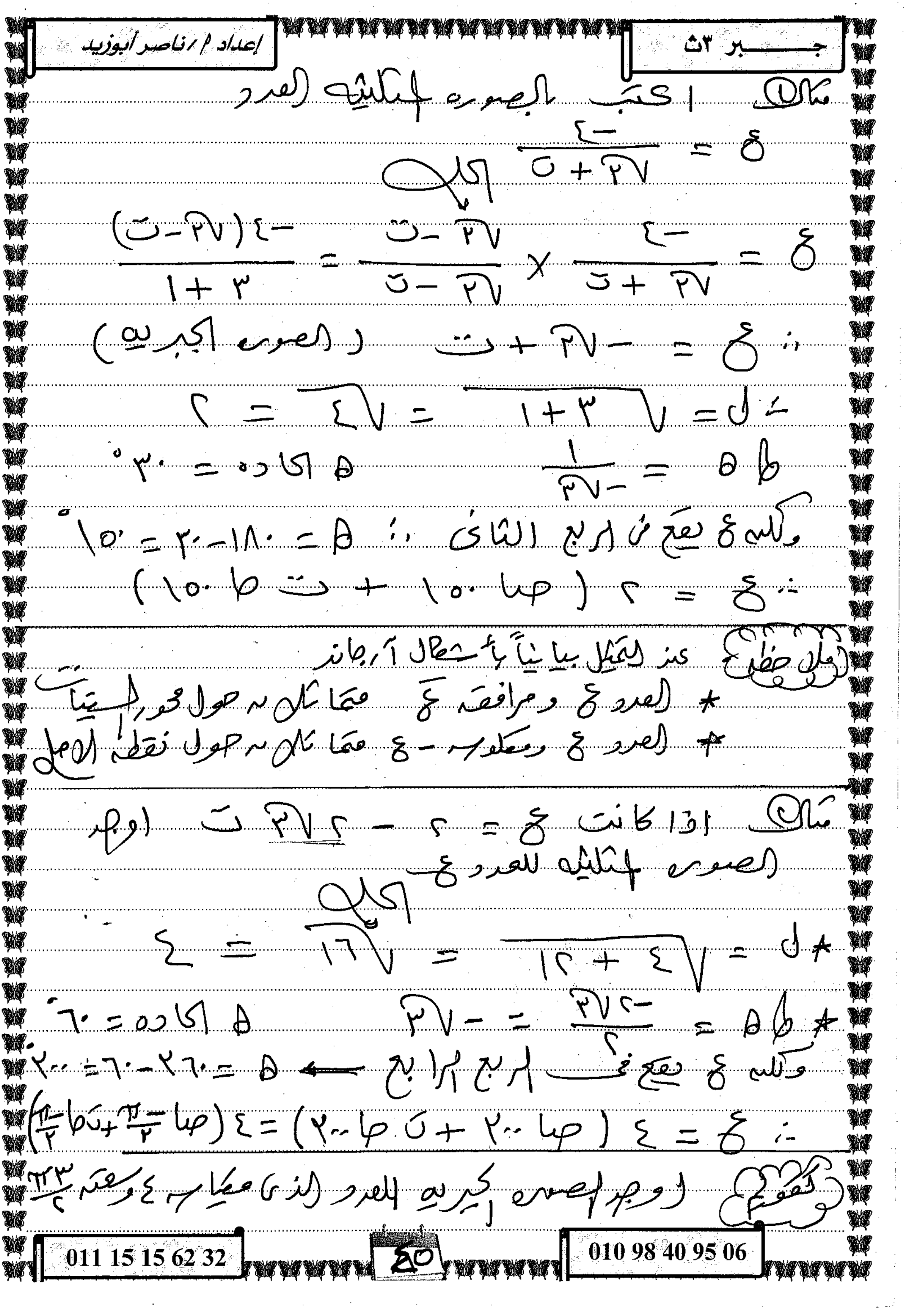
④ $ع \times \bar{ع} = |ع|^2 = |\bar{ع}|^2$

الصورة المثلثية للعدد المركب (القطبية)

$ع = ل \, (جتا \, \theta + ت \, جا \, \theta)$

011 15 15 62 32

010 98 40 95 06



مثال ① اكتب بالصورة المثلثية العدد

$ع = \frac{-٤}{\sqrt{٣} + ت}$

الحل

$ع = \frac{-٤}{\sqrt{٣} + ت} \times \frac{\sqrt{٣} - ت}{\sqrt{٣} - ت} = \frac{-٤(\sqrt{٣} - ت)}{٣ + ١}$

∴ $ع = -\sqrt{٣} + ت$ (الصورة الجبرية)

∴ $ل = \sqrt{٣ + ١} = \sqrt{٤} = ٢$

$ظا هـ = \frac{١}{-\sqrt{٣}}$ ، هـ الحادة $= ٣٠°$

ولكن ع تقع في الربع الثاني ∴ $هـ = ١٨٠ - ٣٠ = ١٥٠°$

∴ $ع = ٢ (جتا ١٥٠ + ت جا ١٥٠)$

أولاً لاحظ: عند التمثيل بيانياً لأشكال أرجاند

* العدد ع ومرافقه $\bar{ع}$ متماثلان حول محور السينات
* العدد ع ومعكوسه −ع متماثلان حول نقطة الأصل

مثال إذا كانت $ع = ٢ - ٢\sqrt{٣} ت$ أوجد الصورة المثلثية للعدد ع

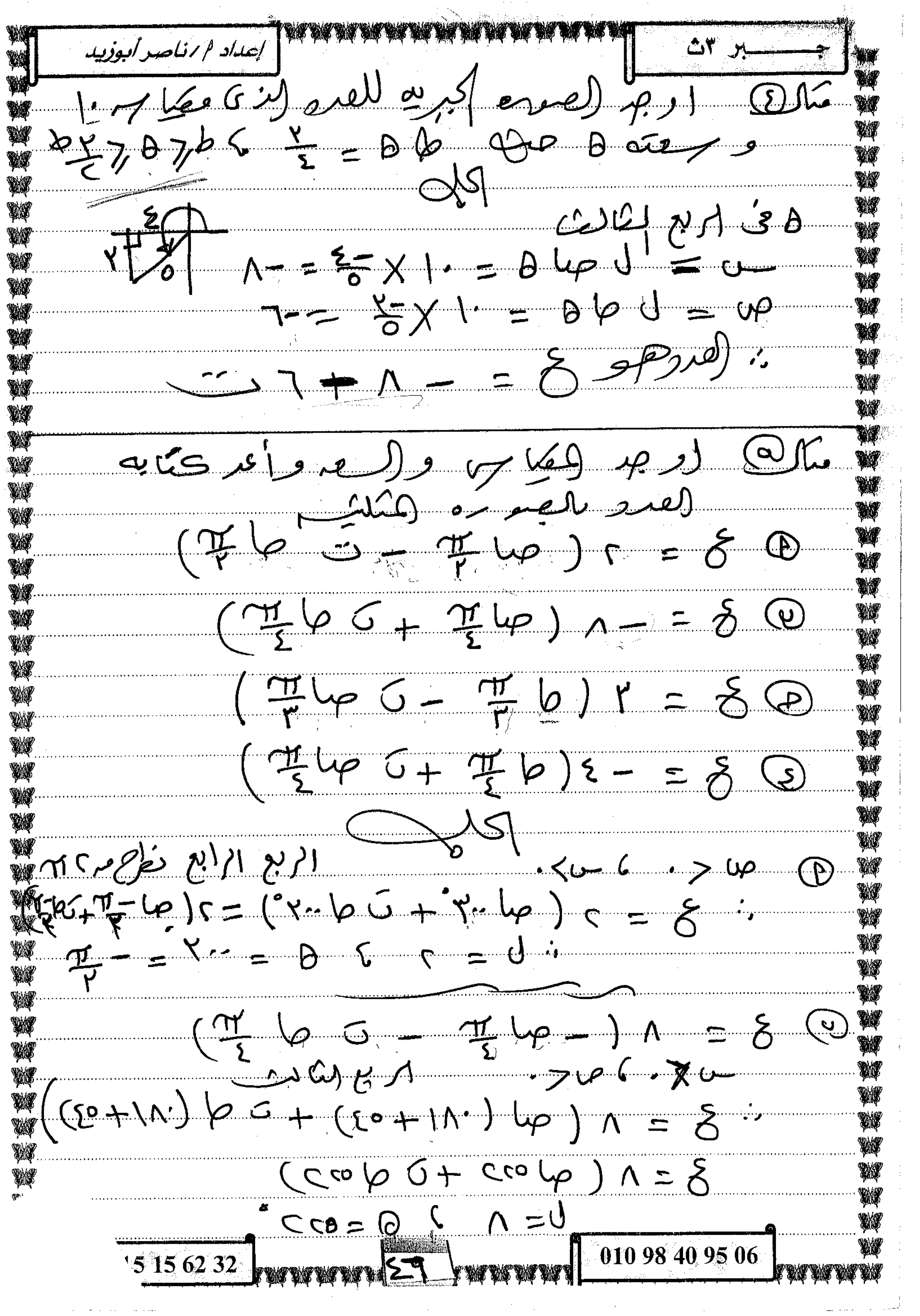
الحل

* $ل = \sqrt{٤ + ١٢} = \sqrt{١٦} = ٤$
* $ظا هـ = \frac{-٢\sqrt{٣}}{٢} = -\sqrt{٣}$ ، هـ الحادة $= ٦٠°$

ولكن ع تقع في الربع الرابع ← $هـ = ٣٦٠ - ٦٠ = ٣٠٠°$

∴ $ع = ٤ (جتا ٣٠٠ + ت جا ٣٠٠) = ٤ (جتا \frac{٥\pi}{٣} + ت جا \frac{٥\pi}{٣})$

كفكرة: أوجد الصورة الجبرية للعدد الذي مقياسه ٤ وسعته $\frac{٣\pi}{٢}$



مثال ④ أوجد الصورة الجبرية للعدد الذي مقياسه ١٠ وسعته هـ حيث ظا هـ = $\frac{٣}{٤}$ ، ط < هـ < $\frac{٣}{٢}$ط

الحل

هـ في الربع الثالث

(مثلث: ٣ ، ٤ ، ٥)

س = ل جتا هـ = ١٠ × $\frac{-٤}{٥}$ = −٨

ص = ل جا هـ = ١٠ × $\frac{-٣}{٥}$ = −٦

∴ العدد هو ع = −٨ − ٦ ت

مثال ⑤ أوجد المقياس والسعة وأعد كتابة العدد بالصورة المثلثية

أ) ع = ٢ (جتا $\frac{\pi}{٣}$ − ت جا $\frac{\pi}{٣}$)

ب) ع = −٨ (جتا $\frac{\pi}{٤}$ + ت جا $\frac{\pi}{٤}$)

ج) ع = ٢ (جا $\frac{\pi}{٣}$ − ت جتا $\frac{\pi}{٣}$)

د) ع = −٤ (جا $\frac{\pi}{٤}$ + ت جتا $\frac{\pi}{٤}$)

الحل

أ) ص < ٠ ، س > ٠ الربع الرابع نطرح من ٣٦٠

∴ ع = ٢ (جتا ٣٠٠° + ت جا ٣٠٠°) = ٢ (جتا $\frac{-\pi}{٣}$ + ت جا $\frac{-\pi}{٣}$)

∴ ل = ٢ ، هـ = ٣٠٠° = $\frac{-\pi}{٣}$

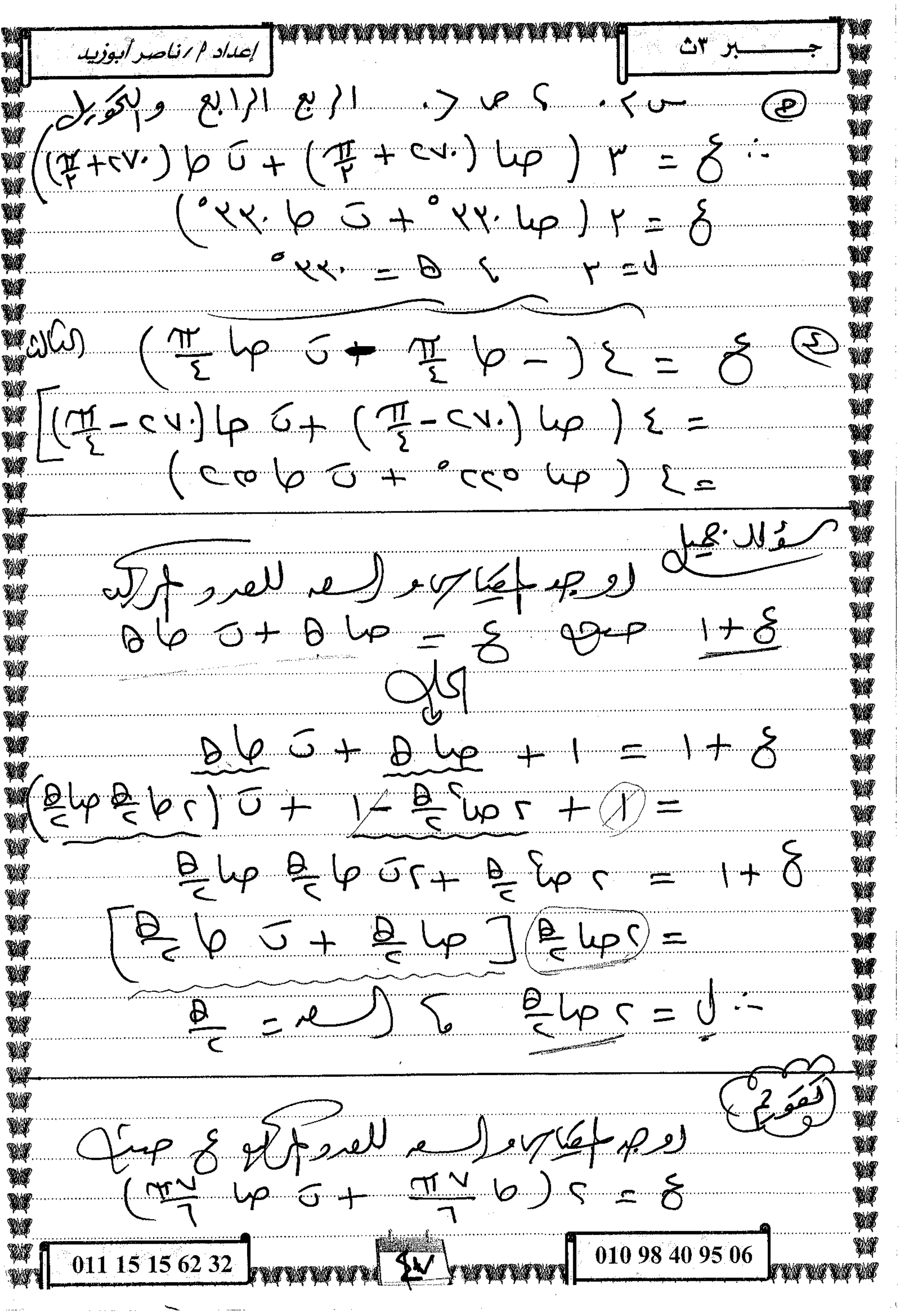
ب) ع = ٨ (− جتا $\frac{\pi}{٤}$ − ت جا $\frac{\pi}{٤}$)

س < ٠ ، ص < ٠ الربع الثالث

∴ ع = ٨ (جتا (١٨٠ + ٤٥) + ت جا (١٨٠ + ٤٥))

ع = ٨ (جتا ٢٢٥ + ت جا ٢٢٥)

ل = ٨ ، هـ = ٢٢٥°



(ج) س > ٠ ، ص < ٠ الربع الرابع وبالتحويل

∴ ع = ٣ (جتا (٢٧٠ + $\frac{\pi}{2}$) + ت جا (٢٧٠ + $\frac{\pi}{2}$))

ع = ٣ (جتا ٣٦٠° + ت جا ٣٦٠°)

ل = ٣ ، هـ = ٣٦٠°

(د) ع = ٤ (− جا $\frac{\pi}{4}$ − ت جتا $\frac{\pi}{4}$) الثالث

= ٤ [جتا (٢٧٠ − $\frac{\pi}{4}$) + ت جا (٢٧٠ − $\frac{\pi}{4}$)]

= ٤ (جتا ٢٢٥° + ت جا ٢٢٥°)

سؤال جميل

أوجد المقياس والسعة للعدد المركب ع + ١ حيث ع = جتا هـ + ت جا هـ

الحل

ع + ١ = ١ + جتا هـ + ت جا هـ

= ١ + ٢ جتا² $\frac{هـ}{2}$ − ١ + ت (٢ جا $\frac{هـ}{2}$ جتا $\frac{هـ}{2}$)

ع + ١ = ٢ جتا² $\frac{هـ}{2}$ + ٢ت جا $\frac{هـ}{2}$ جتا $\frac{هـ}{2}$

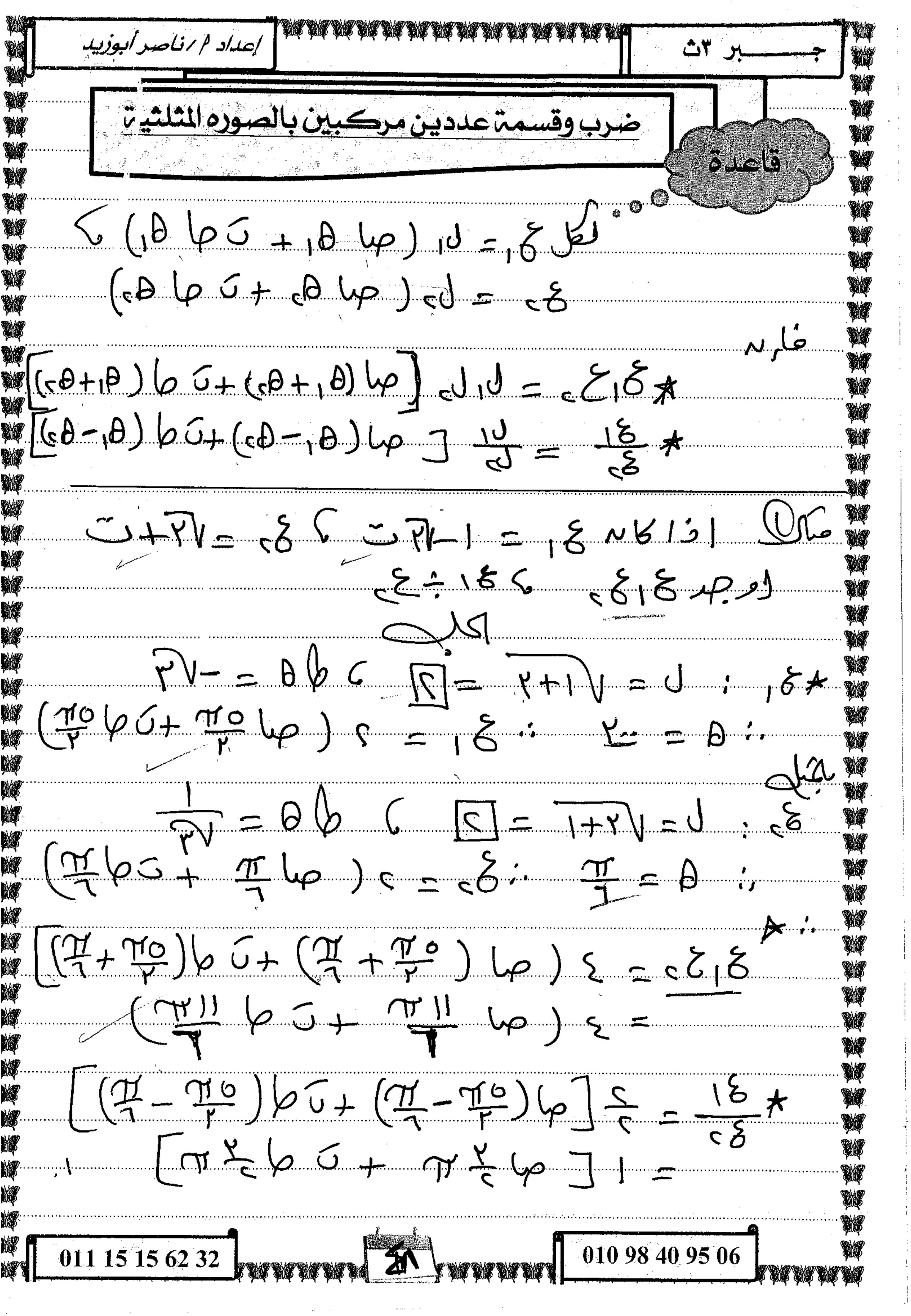
= ٢ جتا $\frac{هـ}{2}$ [جتا $\frac{هـ}{2}$ + ت جا $\frac{هـ}{2}$]

∴ ل = ٢ جتا $\frac{هـ}{2}$ ، السعة = $\frac{هـ}{2}$

تقويم

أوجد المقياس والسعة للعدد المركب ع حيث

ع = ٢ (جا $\frac{7\pi}{6}$ + ت جتا $\frac{7\pi}{6}$)



إعداد أ/ ناصر أبوزيد

ضرب وقسمة عددين مركبين بالصورة المثلثية

قاعدة

لكل $ع_1 = ل_1 (جتا\, θ_1 + ت\, جا\, θ_1)$ ، $ع_2 = ل_2 (جتا\, θ_2 + ت\, جا\, θ_2)$

فإن

* $ع_1 ع_2 = ل_1 ل_2 [جتا(θ_1+θ_2) + ت\, جا(θ_1+θ_2)]$
* $\frac{ع_1}{ع_2} = \frac{ل_1}{ل_2} [جتا(θ_1-θ_2) + ت\, جا(θ_1-θ_2)]$

مثال ① إذا كان $ع_1 = 1 - \sqrt{3}\, ت$ ، $ع_2 = \sqrt{3} + ت$ أوجد $ع_1 ع_2$ ، $ع_1 \div ع_2$

الحل

* $ع_1$: $ل = \sqrt{1+3} = 2$ ، $ظا\, θ = -\sqrt{3}$

∴ $θ = \frac{5π}{3}$ ∴ $ع_1 = 2 (جتا \frac{5π}{3} + ت\, جا \frac{5π}{3})$

بالمثل $ع_2$: $ل = \sqrt{3+1} = 2$ ، $ظا\, θ = \frac{1}{\sqrt{3}}$

∴ $θ = \frac{π}{6}$ ∴ $ع_2 = 2 (جتا \frac{π}{6} + ت\, جا \frac{π}{6})$

∴ * $ع_1 ع_2 = 4 (جتا(\frac{5π}{3} + \frac{π}{6}) + ت\, جا(\frac{5π}{3} + \frac{π}{6}))$

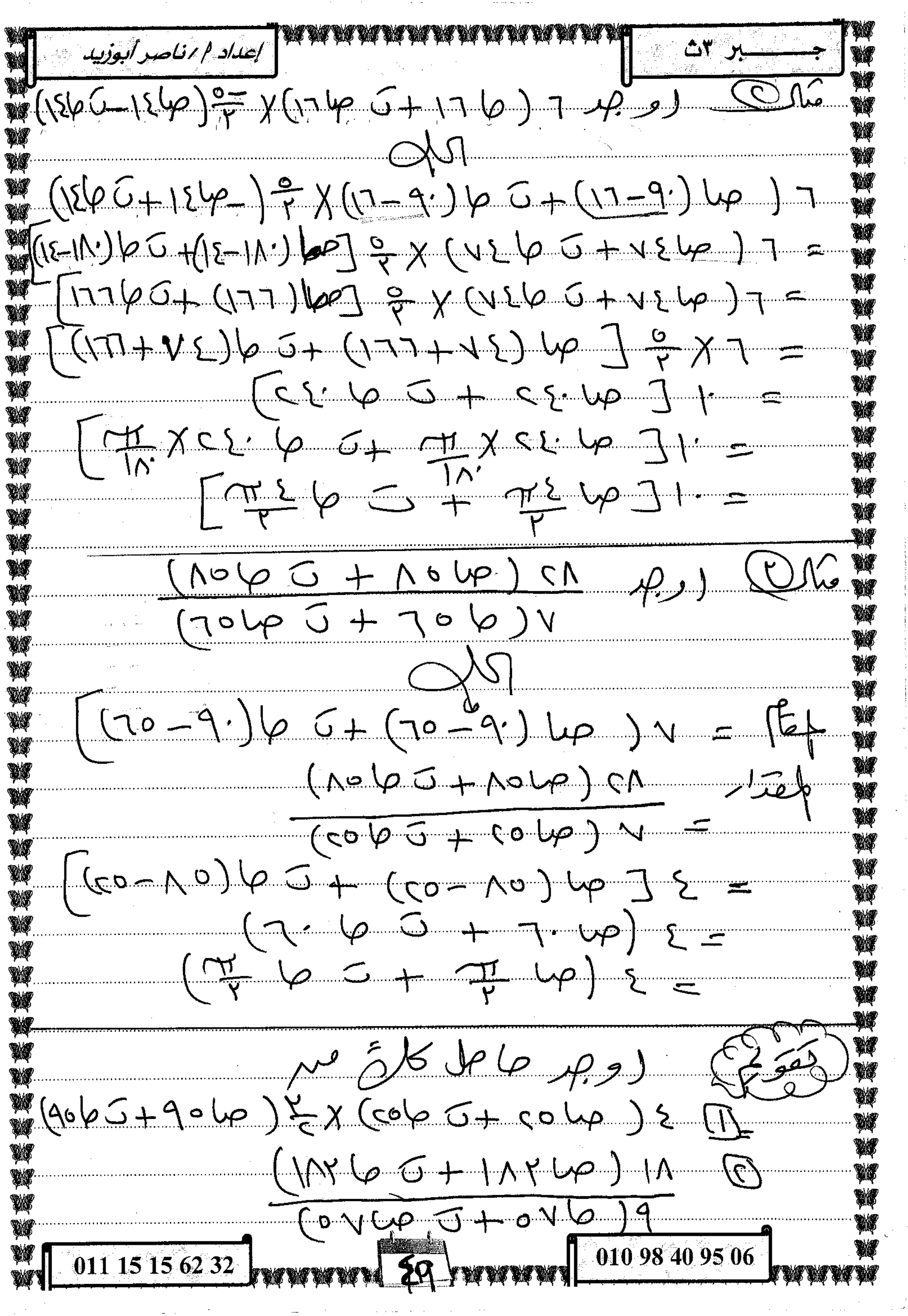
$= 4 (جتا \frac{11π}{6} + ت\, جا \frac{11π}{6})$

* $\frac{ع_1}{ع_2} = \frac{2}{2} [جتا(\frac{5π}{3} - \frac{π}{6}) + ت\, جا(\frac{5π}{3} - \frac{π}{6})]$

$= 1 [جتا \frac{3π}{2} + ت\, جا \frac{3π}{2}]$

011 15 15 62 32

010 98 40 95 06



مثال ① أوجد ٦ (جتا ١٦ + ت جا ١٦) × ٥/٢ (جا ١٤ − ت جتا ١٤)

الحل

٦ (جا (٩٠ − ١٦) + ت جتا (٩٠ − ١٦)) × ٥/٢ (− جا ١٤ + ت جتا ١٤)

= ٦ (جا ٧٤ + ت جتا ٧٤) × ٥/٢ [جا (١٨٠ − ١٤) + ت جتا (١٨٠ − ١٤)]

= ٦ (جا ٧٤ + ت جتا ٧٤) × ٥/٢ [جا (١٦٦) + ت جتا ١٦٦]

= ٦ × ٥/٢ [جا (٧٤ + ١٦٦) + ت جتا (٧٤ + ١٦٦)]

= ١٠ [جا ٢٤٠ + ت جتا ٢٤٠]

= ١٠ [جا π/١٨٠ × ٢٤٠ + ت جتا π/١٨٠ × ٢٤٠]

= ١٠ [جا ٤π/٣ + ت جتا ٤π/٣]

مثال ② أوجد $\frac{\text{٢٨ (جا ٨٥ + ت جتا ٨٥)}}{\text{٧ (جتا ٦٥ + ت جا ٦٥)}}$

الحل

المقام = ٧ (جا (٩٠ − ٦٥) + ت جتا (٩٠ − ٦٥))

المقدار = $\frac{\text{٢٨ (جا ٨٥ + ت جتا ٨٥)}}{\text{٧ (جا ٢٥ + ت جتا ٢٥)}}$

= ٤ [جا (٨٥ − ٢٥) + ت جتا (٨٥ − ٢٥)]

= ٤ (جا ٦٠ + ت جتا ٦٠)

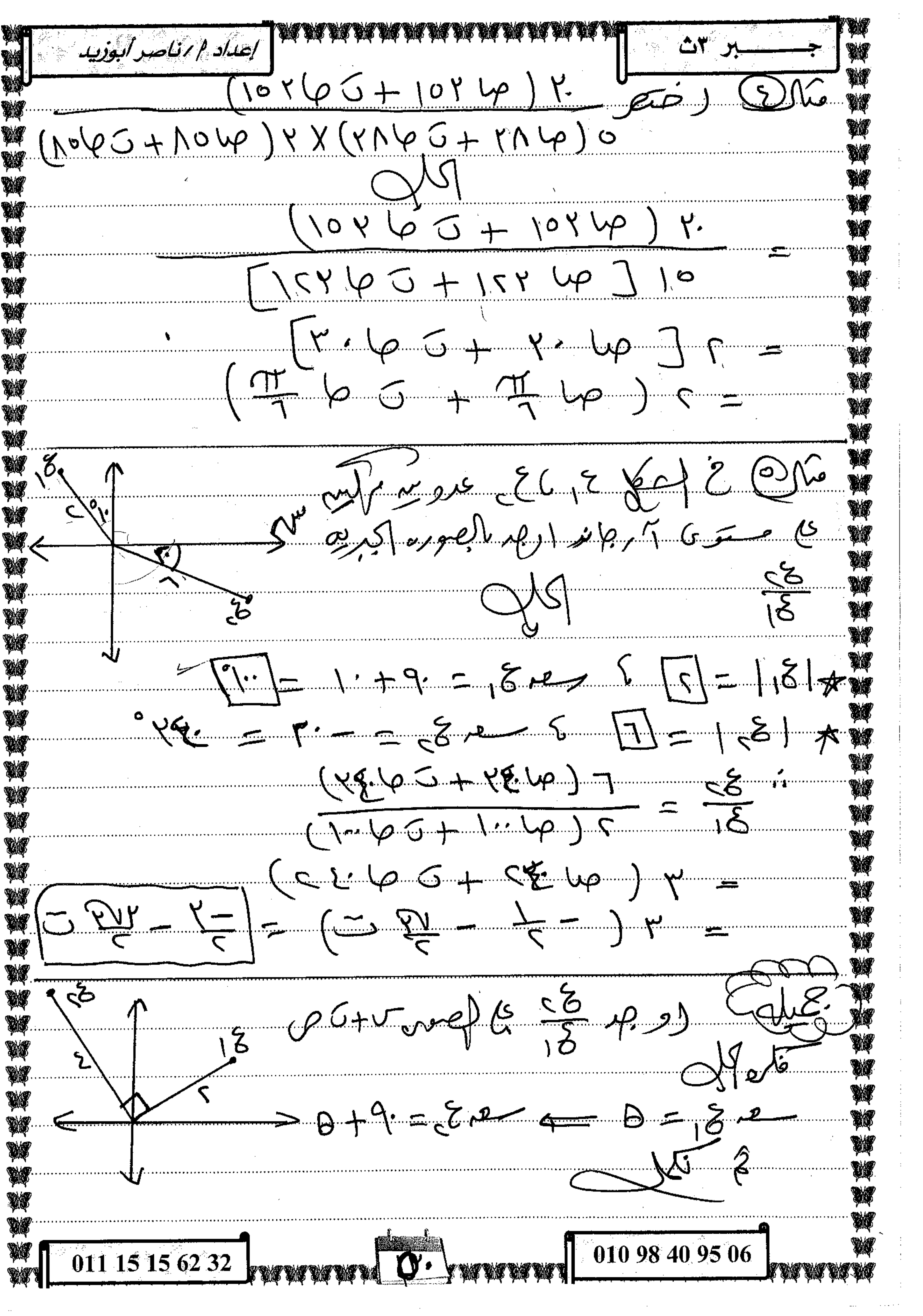
= ٤ (جا π/٣ + ت جتا π/٣)

تقويم

أوجد حاصل كل من

① ٤ (جا ٢٥ + ت جتا ٢٥) × ٣/٢ (جا ٩٥ + ت جتا ٩٥)

② $\frac{\text{١٨ (جا ١٨٢ + ت جتا ١٨٢)}}{\text{٩ (جتا ٥٧ + ت جا ٥٧)}}$



مثال ④ اختصر

$$\frac{20(\text{جتا }152 + \text{ت جا }152)}{5(\text{جتا }28 + \text{ت جا }28) \times 2(\text{جتا }85 + \text{ت جا }85)}$$

الحل

$$= \frac{20(\text{جتا }152 + \text{ت جا }152)}{10[\text{جتا }122 + \text{ت جا }122]}$$

$$= 2[\text{جتا }30 + \text{ت جا }30]$$

$$= 2(\text{جتا }\tfrac{\pi}{6} + \text{ت جا }\tfrac{\pi}{6})$$

مثال ⑤ في الشكل ع١، ع٢ عددين مركبين في مستوى آرجاند أوجد $\frac{ع_2}{ع_1}$ بالصورة الجبرية

الحل

★ |ع١| = ② ، سعة ع١ = ٩٠ + ١٠ = 100°

★ |ع٢| = ⑥ ، سعة ع٢ = −٣٠ = ٣٣٠°

$$\therefore \frac{ع_2}{ع_1} = \frac{6(\text{جتا }330 + \text{ت جا }330)}{2(\text{جتا }100 + \text{ت جا }100)}$$

$$= 3(\text{جتا }230 + \text{ت جا }230)$$

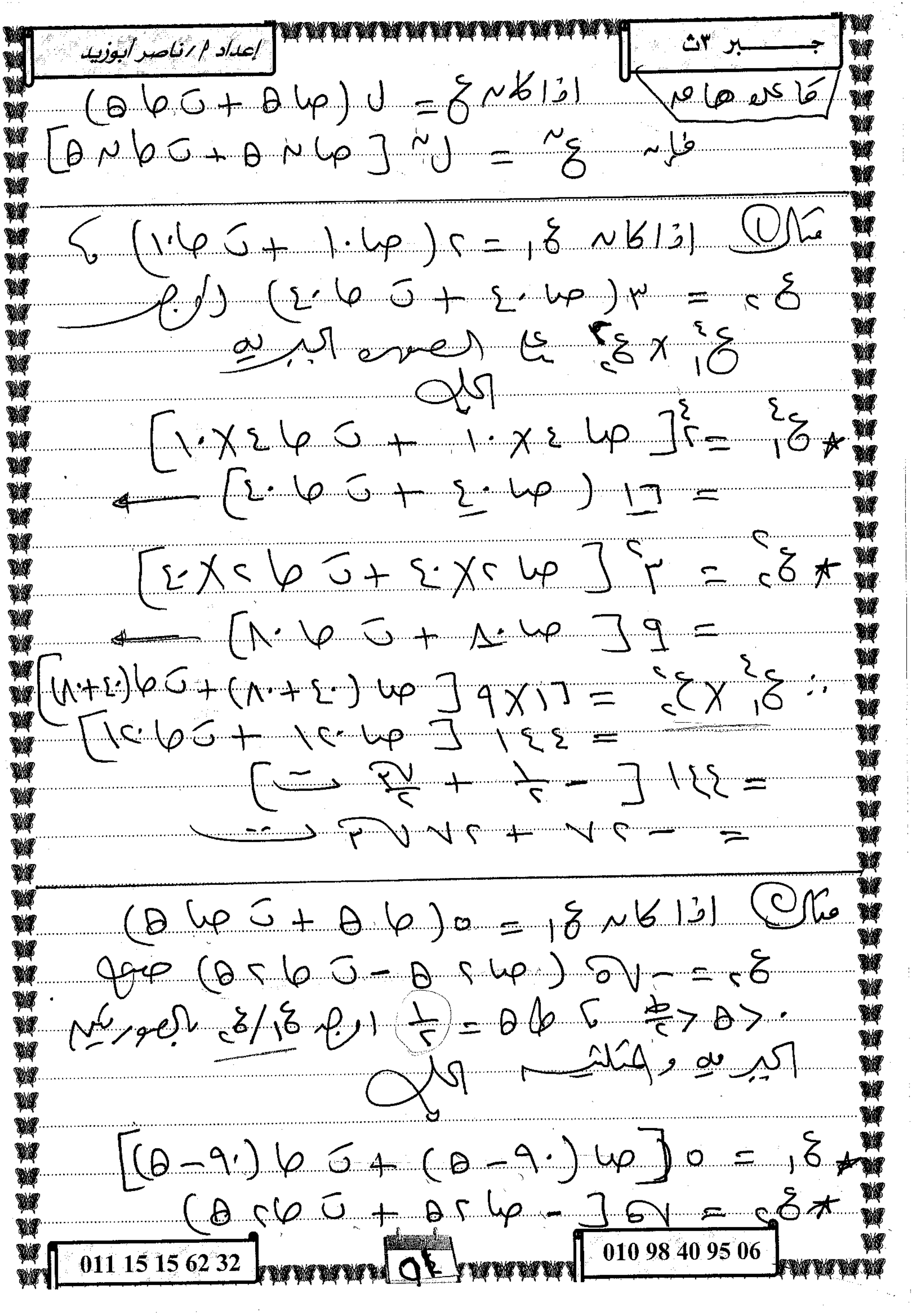
$$= 3(-\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\text{ت}) = -\tfrac{3}{2} - \tfrac{3\sqrt{3}}{2}\text{ت}$$

حيلة: أوجد $\frac{ع_2}{ع_1}$ في الصورة س + ت ص

فكرة حل

سعة ع١ = θ ⟵ سعة ع٢ = ٩٠ + θ

ثم نكمل



قاعدة هامة

إذا كان $ع = ل\,(جتا\ هـ + ت\ جا\ هـ)$

فإن $ع^{ن} = ل^{ن}\,[جتا\ ن\ هـ + ت\ جا\ ن\ هـ]$

مثال ① إذا كان $ع_1 = ٢\,(جتا\ ١٠ + ت\ جا\ ١٠)$ ، $ع_2 = ٣\,(جتا\ ٤٠ + ت\ جا\ ٤٠)$ أوجد $ع_1^{٤} \times ع_2^{٢}$ في الصورة الجبرية

الحل

* $ع_1^{٤} = ٢^{٤}\,[جتا\ ١٠\times٤ + ت\ جا\ ١٠\times٤]$

$= ١٦\,(جتا\ ٤٠ + ت\ جا\ ٤٠)$ ←

* $ع_2^{٢} = ٣^{٢}\,[جتا\ ٢\times٤٠ + ت\ جا\ ٢\times٤٠]$

$= ٩\,[جتا\ ٨٠ + ت\ جا\ ٨٠]$ ←

$\therefore ع_1^{٤} \times ع_2^{٢} = ١٦\times٩\,[جتا\,(٨٠+٤٠) + ت\ جا\,(٨٠+٤٠)]$

$= ١٤٤\,[جتا\ ١٢٠ + ت\ جا\ ١٢٠]$

$= ١٤٤\,[-\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}\,ت]$

$= -٧٢ + ٧٢\sqrt{٣}\,ت$

مثال ② إذا كان $ع_1 = ٥\,(جا\ هـ + ت\ جتا\ هـ)$

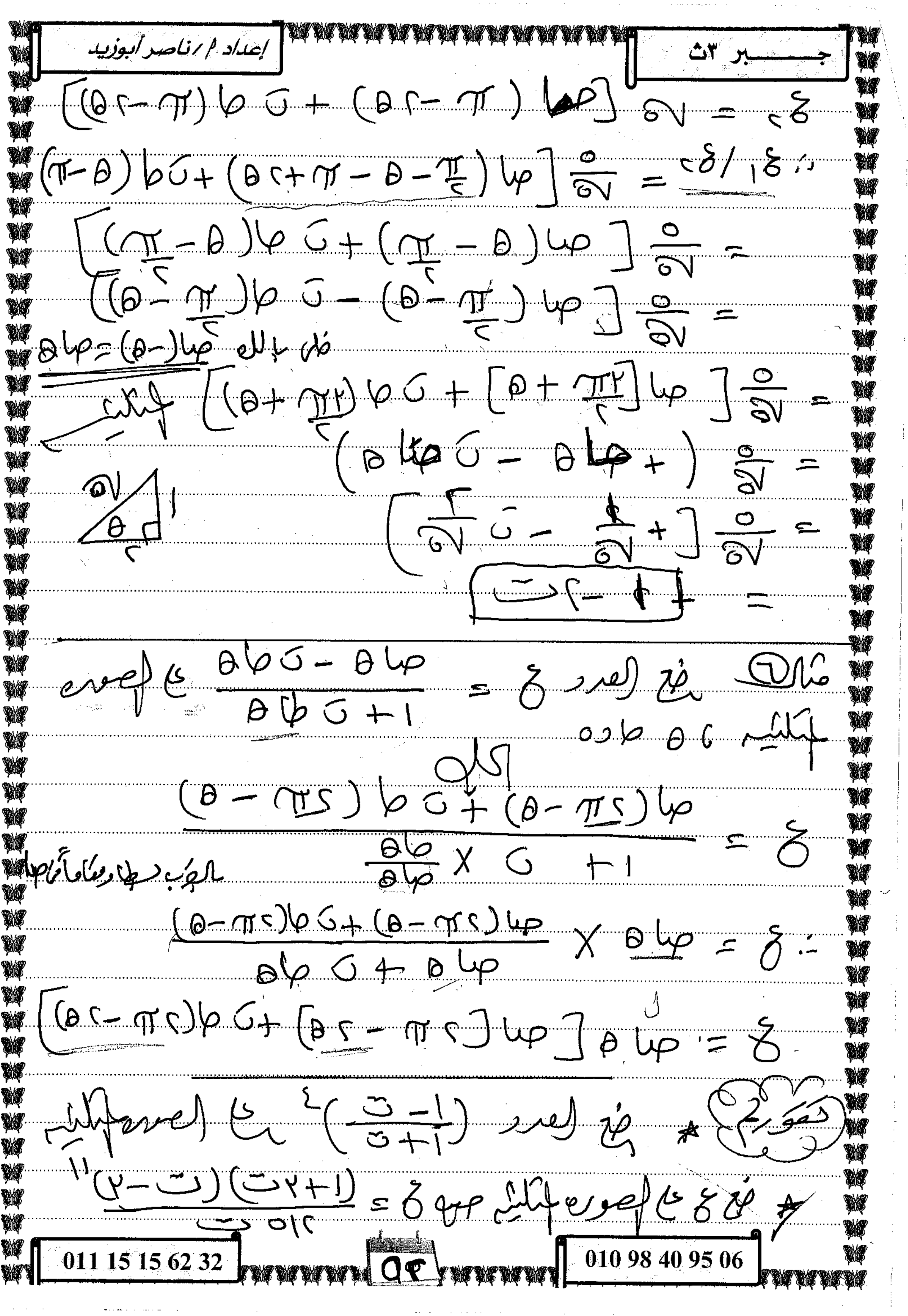
$ع_2 = ٦\,(جتا\ ٢هـ - ت\ جا\ ٢هـ)$ حيث

$٠ < هـ < \frac{ط}{٢}$ ، $جا\ هـ = \frac{١}{٢}$ أوجد $ع_1 / ع_2$ بالصورتين الجبرية والمثلثية

الحل

* $ع_1 = ٥\,[جتا\,(٩٠ - هـ) + ت\ جا\,(٩٠ - هـ)]$

* $ع_2 = ٦\,[-\,جتا\ ٢هـ + ت\ جا\ ٢هـ)$



$ع_2 = ل\,[جا(\pi - 2هـ) + ت\,جتا(\pi - 2هـ)]$

$\therefore \dfrac{ع_1}{ع_2} = \dfrac{ل}{ل}\,[جا(\frac{\pi}{2} - هـ - \pi + 2هـ) + ت\,جتا(\pi - هـ)]$

$= \dfrac{ل}{ل}\,[جا(\frac{\pi}{2} - هـ) + ت\,جتا(\frac{\pi}{2} - هـ)]$

$= \dfrac{ل}{ل}\,[جا(هـ - \frac{\pi}{2}) - ت\,جتا(هـ - \frac{\pi}{2})]$

حل بالله $جا(-هـ) = -جا\,هـ$

بالتكميل $= \dfrac{ل}{ل}\,[جا(هـ + \frac{3\pi}{2}) + ت\,جتا(هـ + \frac{3\pi}{2})]$

$= \dfrac{ل}{ل}\,(+جتا\,هـ - ت\,جا\,هـ)$

$= \dfrac{ل}{ل}\,[+\dfrac{1}{ل} - ت\,\dfrac{2}{ل}]$

$= \boxed{1 - 2ت}$

مثال ⑥ ضع العدد $ع = \dfrac{جا\,هـ - ت\,جتا\,هـ}{1 + ت\,ظا\,هـ}$ على الصورة المثلثية ، هـ ، ط

الحل

$ع = \dfrac{جا(2\pi - هـ) + ت\,جتا(2\pi - هـ)}{1 + ت \times \dfrac{جا\,هـ}{جتا\,هـ}}$

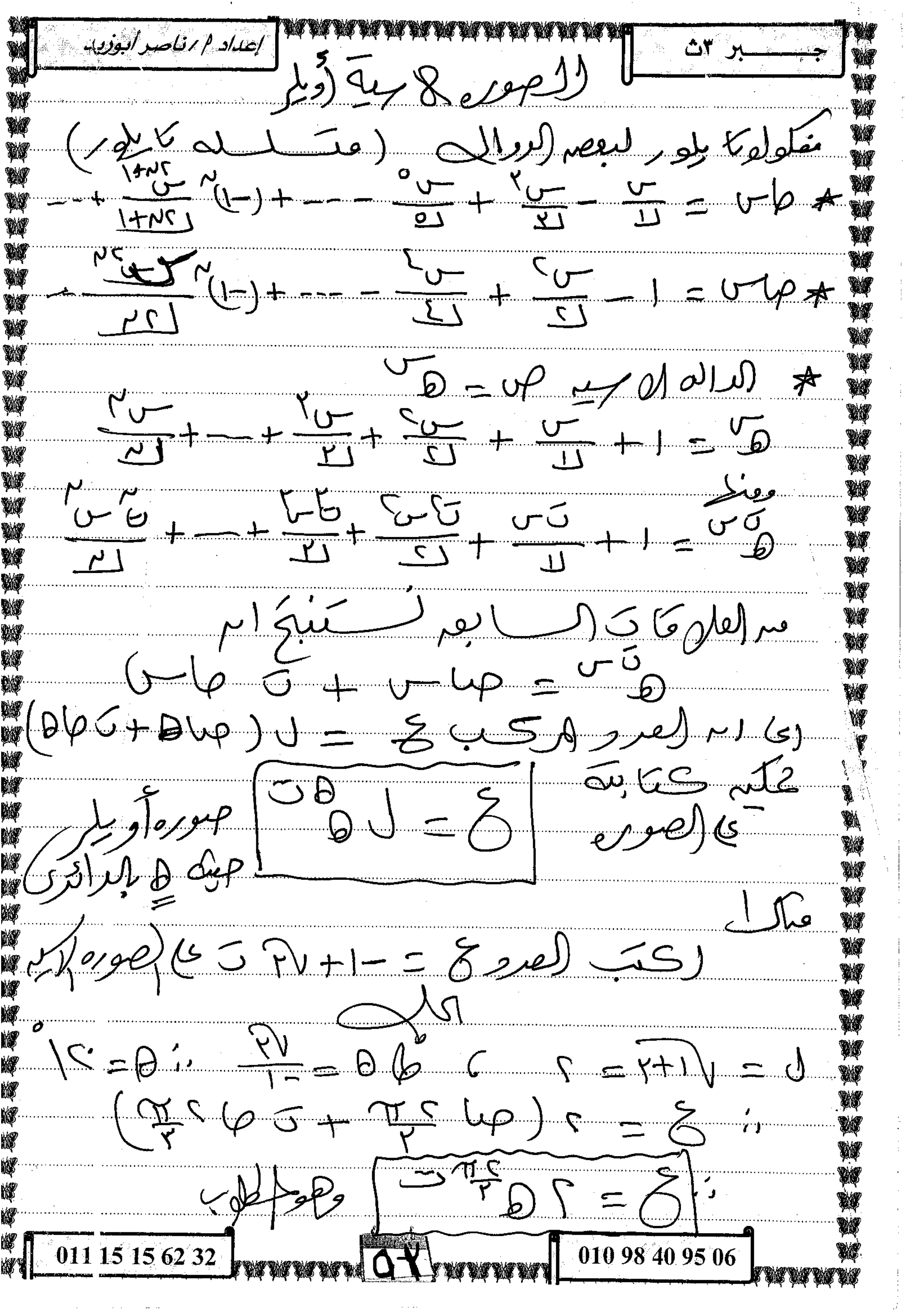
بالضرب بسطاً ومقاماً في جتا

$\therefore ع = جتا\,هـ \times \dfrac{جا(2\pi - هـ) + ت\,جتا(2\pi - هـ)}{جتا\,هـ + ت\,جا\,هـ}$

$\therefore ع = جتا\,هـ\,[جا(2\pi - 2هـ) + ت\,جتا(2\pi - 2هـ)]$

تمرين * ضع العدد $\left(\dfrac{1 - ت}{1 + ت}\right)^4$ على الصورة المثلثية

* ضع ع على الصورة المثلثية حيث $ع = \dfrac{(1 + 2ت)(2 - ت)^{11}}{ت^{512}}$



الصورة الأسية (أويلر)

مفكوكات ماكلورين لبعض الدوال (متسلسلة تايلور)

* $جا س = \frac{س}{ل1} - \frac{س^3}{ل3} + \frac{س^5}{ل5} - \dots + (-1)^ن \frac{س^{2ن+1}}{ل(2ن+1)} + \dots$

* $جتا س = 1 - \frac{س^2}{ل2} + \frac{س^4}{ل4} - \dots + (-1)^ن \frac{س^{2ن}}{ل2ن} + \dots$

* الدالة الأسية $ص = هـ^س$

$$هـ^س = 1 + \frac{س}{ل1} + \frac{س^2}{ل2} + \frac{س^3}{ل3} + \dots + \frac{س^ن}{لن}$$

ومنها

$$هـ^{ت س} = 1 + \frac{ت س}{ل1} + \frac{ت^2 س^2}{ل2} + \frac{ت^3 س^3}{ل3} + \dots + \frac{ت^ن س^ن}{لن}$$

من العلاقات السابقة نستنتج أن

$$هـ^{ت س} = جتا س + ت جا س$$

أي أن العدد المركب $ع = ل (جتا هـ + ت جا هـ)$

يمكن كتابته في الصورة

$$ع = ل هـ^{هـ ت}$$

صورة أويلر حيث هـ بالدائري

مثال

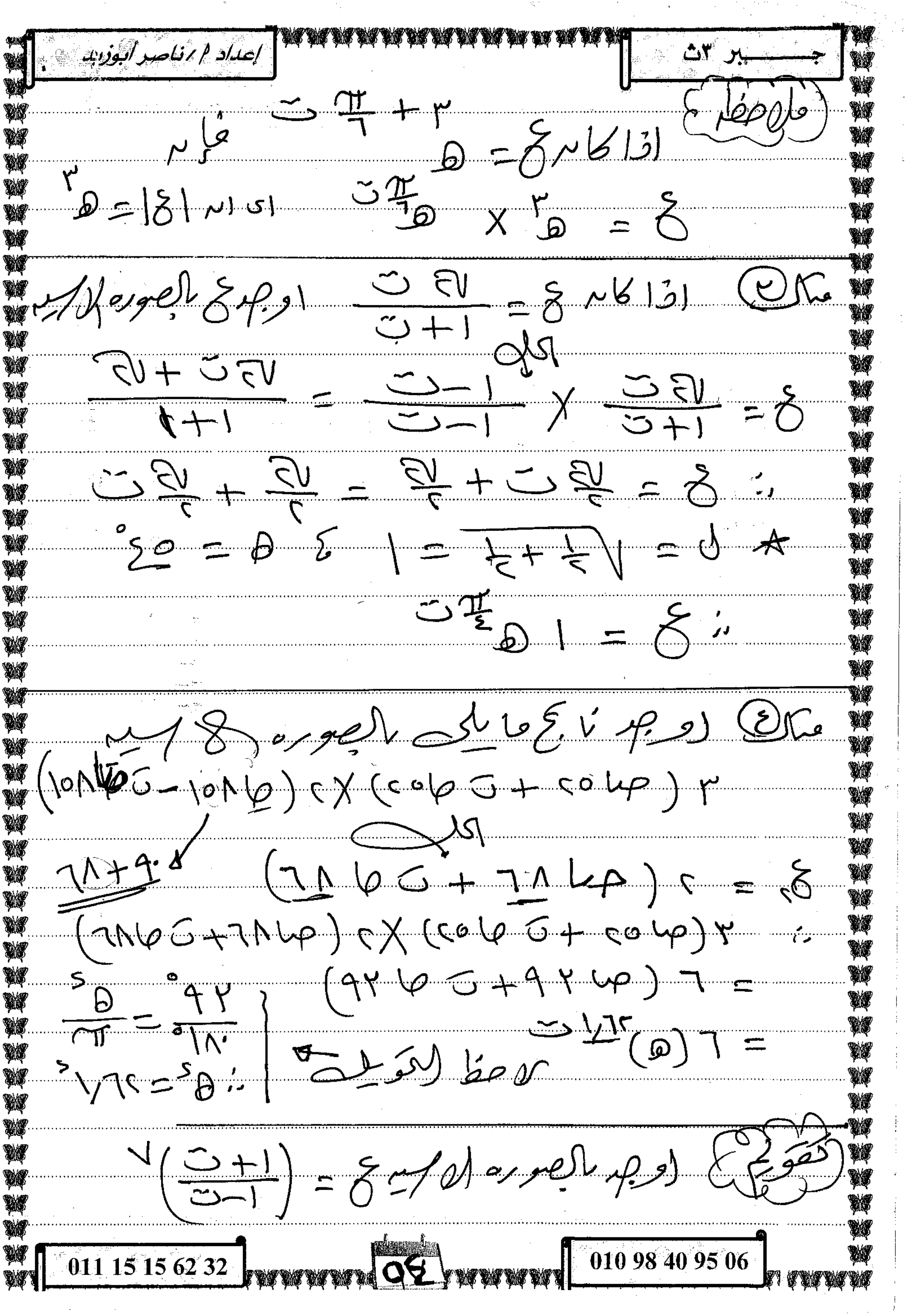
اكتب العدد $ع = -1 + \sqrt{3} ت$ في الصورة الأسية

الحل

$ل = \sqrt{1+3} = 2$ ، $ظا هـ = \frac{\sqrt{3}}{-1}$ $\therefore هـ = 120°$

$\therefore ع = 2 (جتا \frac{2\pi}{3} + ت جا \frac{2\pi}{3})$

$\therefore ع = 2 هـ^{\frac{2\pi}{3} ت}$ وهو المطلوب



لاحظ

إذا كان $ع = ه^{٣ + \frac{\pi}{٦} ت}$ فإن

$ع = ه^{٣} \times ه^{\frac{\pi}{٦} ت}$ أي أن $|ع| = ه^{٣}$

مثال ② إذا كان $ع = \frac{\sqrt{٢}\, ت}{١ + ت}$ أوجد ع بالصورة الأسية

الحل

$ع = \frac{\sqrt{٢}\, ت}{١ + ت} \times \frac{١ - ت}{١ - ت} = \frac{\sqrt{٢}\, ت + \sqrt{٢}}{١ + ١}$

$\therefore ع = \frac{\sqrt{٢}}{٢} ت + \frac{\sqrt{٢}}{٢} = \frac{\sqrt{٢}}{٢} + \frac{\sqrt{٢}}{٢} ت$

$\star$ $ل = \sqrt{\frac{١}{٢} + \frac{١}{٢}} = ١$ ، $هـ = ٤٥°$

$\therefore ع = ١\, ه^{\frac{\pi}{٤} ت}$

مثال ④ أوجد ناتج ما يلي بالصورة الأسية

$٣ (جتا ٢٥ + ت جا ٢٥) \times ٢ (جا ١٥٨ - ت جتا ١٥٨)$

الحل

$١٥٨ = ٩٠ + ٦٨$

$ع_٢ = ٢ (جتا ٦٨ + ت جا ٦٨)$

$\therefore ٣ (جتا ٢٥ + ت جا ٢٥) \times ٢ (جتا ٦٨ + ت جا ٦٨)$

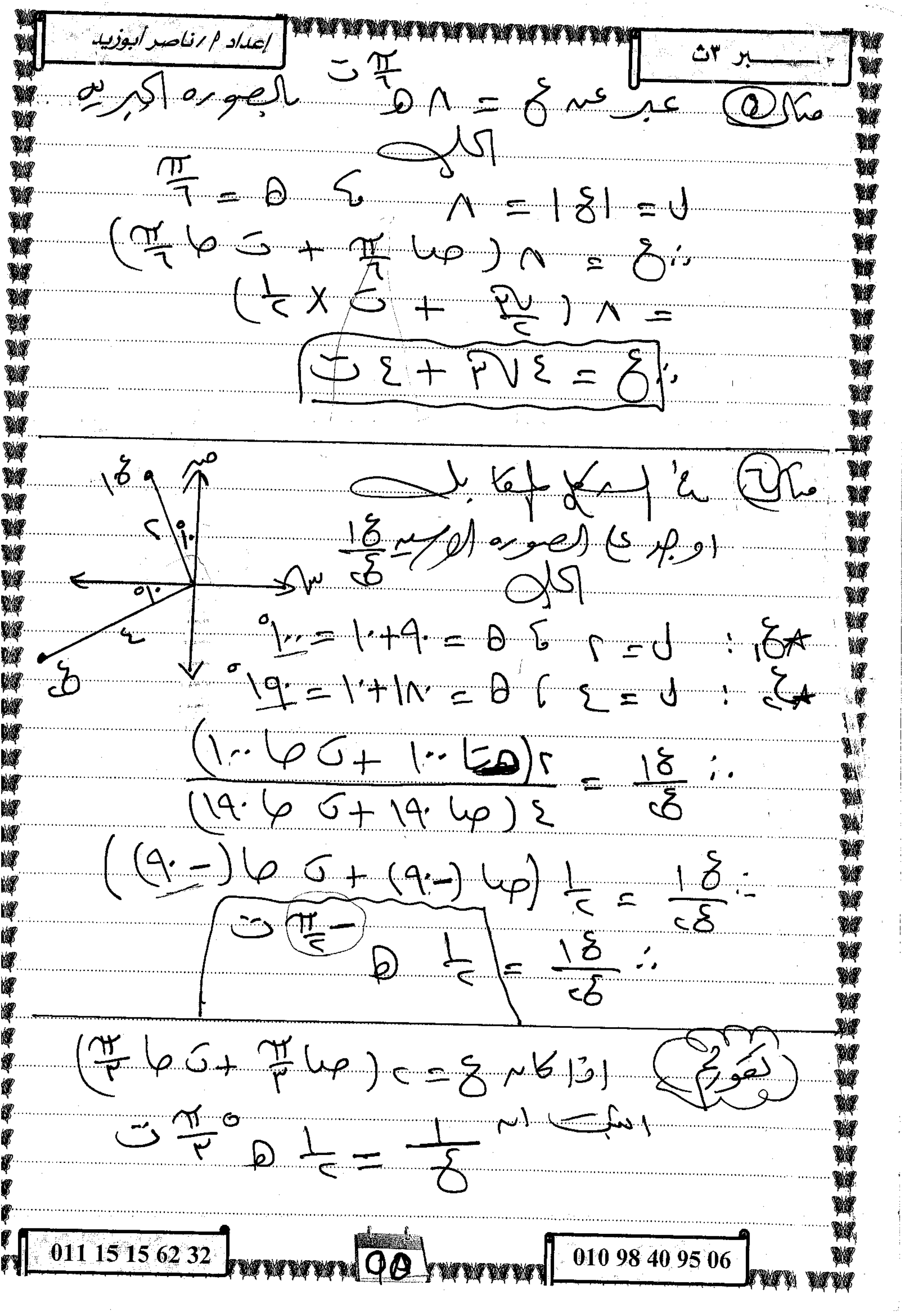
$= ٦ (جتا ٩٣ + ت جا ٩٣)$

$= ٦ (ه)^{١٫٦٢ ت}$

لاحظ التوصيلة

$\frac{هـ^{د}}{\pi} = \frac{٩٣°}{١٨٠°}$ $\therefore هـ^{د} = ١٫٦٢^{د}$

تقويم أوجد بالصورة الأسية $ع = \left(\frac{١ + ت}{١ - ت}\right)^{٧}$



مثال (٥) عبر عن $ع = ٨ هـ^{\frac{\pi}{٦} ت}$ بالصورة الجبرية

الحل

$ل = |ع| = ٨$ ، $هـ = \frac{\pi}{٦}$

$\therefore ع = ٨ \left(جتا \frac{\pi}{٦} + ت جا \frac{\pi}{٦} \right)$

$= ٨ \left(\frac{\sqrt{٣}}{٢} + ت \times \frac{١}{٢} \right)$

$\therefore ع = ٤\sqrt{٣} + ٤ت$

مثال (٦) من الشكل المقابل أوجد $\frac{ع_1}{ع_2}$ بالصورة الأسية

الحل

★ $ع_1$: $ل = ٢$ ، $هـ = ٩٠ + ١٠ = ١٠٠°$

★ $ع_2$: $ل = ٤$ ، $هـ = ١٨٠ + ١٠ = ١٩٠°$

$\therefore \frac{ع_1}{ع_2} = \frac{٢ (جتا ١٠٠ + ت جا ١٠٠)}{٤ (جتا ١٩٠ + ت جا ١٩٠)}$

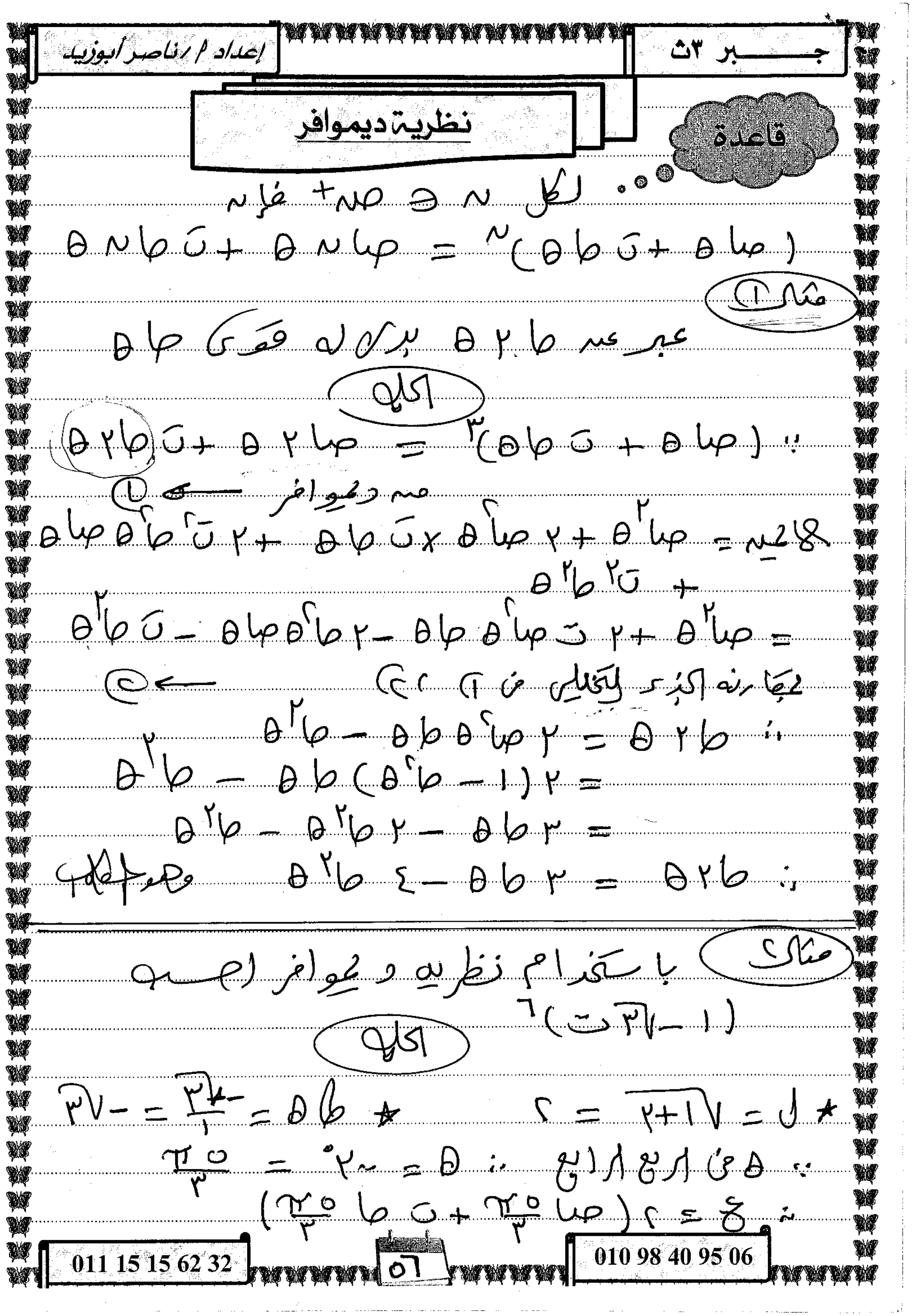
$\therefore \frac{ع_1}{ع_2} = \frac{١}{٢} \left(جتا (-٩٠) + ت جا (-٩٠) \right)$

$\therefore \frac{ع_1}{ع_2} = \frac{١}{٢} هـ^{-\frac{\pi}{٢} ت}$

تقويم

إذا كان $ع = ٢ \left(جتا \frac{\pi}{٣} + ت جا \frac{\pi}{٣} \right)$ أثبت أن

$\frac{١}{ع} = \frac{١}{٢} هـ^{\frac{\pi}{٣} ت}$



نظرية ديموافر

قاعدة

لكل ن ∈ ص+ فإن

$$(\text{جتا}\,\theta + \text{ت جا}\,\theta)^{ن} = \text{جتا}\,ن\theta + \text{ت جا}\,ن\theta$$

مثال ①

عبر عن جا ٣θ بدلالة قوى جا θ

الحل

∵ (جتا θ + ت جا θ)^٣ = جتا ٣θ + ت جا ٣θ ← ① من ديموافر

الطرف الأيمن = جتا^٣ θ + ٣ جتا^٢ θ × ت جا θ + ٣ ت^٢ جا^٢ θ جتا θ + ت^٣ جا^٣ θ

= جتا^٣ θ + ٣ ت جتا^٢ θ جا θ − ٣ جا^٢ θ جتا θ − ت جا^٣ θ

بمقارنة الجزء التخيلي من ①، ② ← ②

∴ جا ٣θ = ٣ جتا^٢ θ جا θ − جا^٣ θ

= ٣(١ − جا^٢ θ) جا θ − جا^٣ θ

= ٣ جا θ − ٣ جا^٣ θ − جا^٣ θ

∴ جا ٣θ = ٣ جا θ − ٤ جا^٣ θ وهو المطلوب

مثال ②

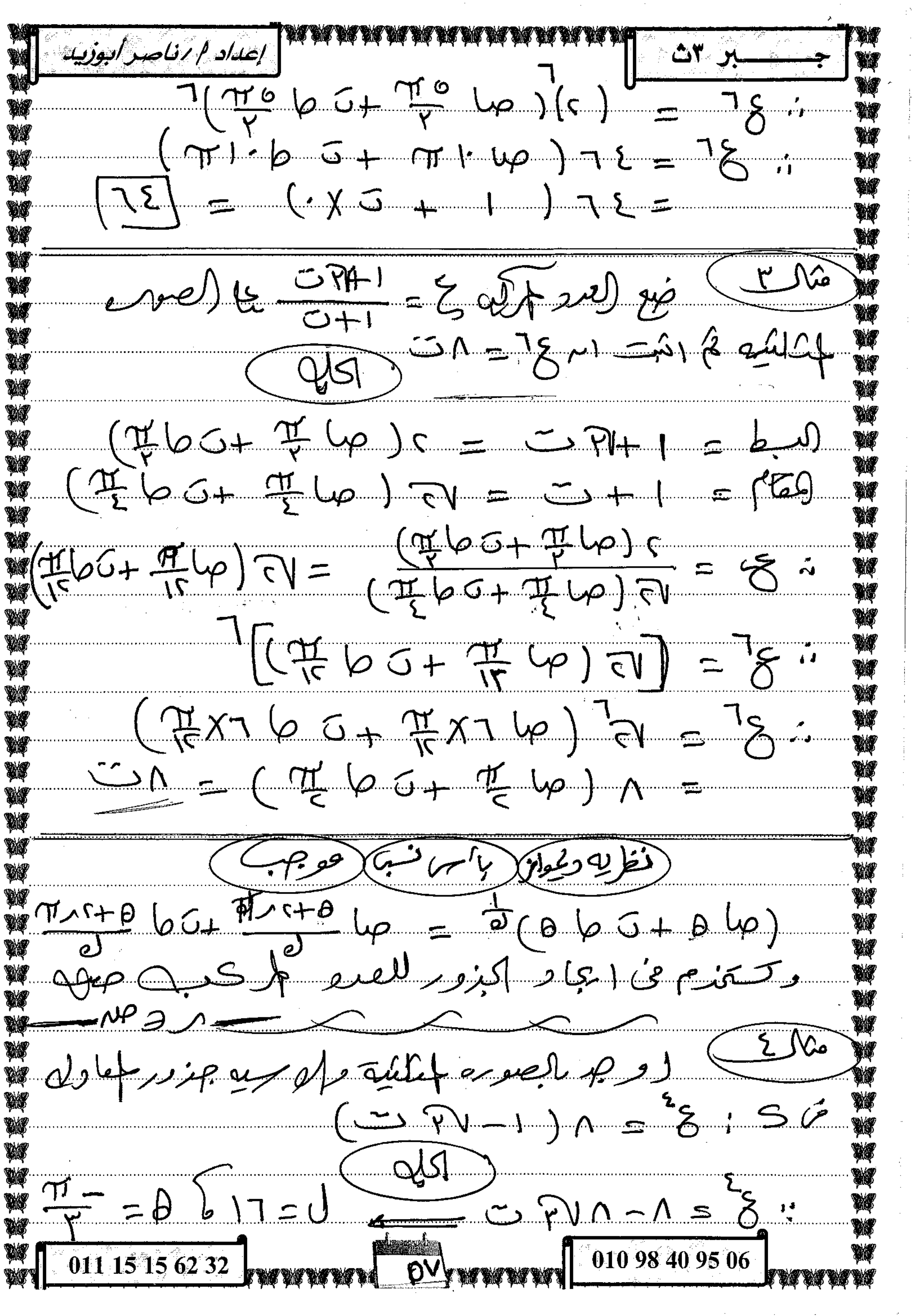
باستخدام نظرية ديموافر احسب (١ − √٣ ت)^٦

الحل

★ ل = √(١+٣) = ٢ ★ ظا θ = −√٣/١ = −√٣

∵ θ من الربع الرابع ∴ θ = ٣٠٠° = ٥π/٣

∴ ع = ٢(جتا ٥π/٣ + ت جا ٥π/٣)



$\therefore$ ع^{٦} $=$ $(٢)^{٦}$ (جتا $\frac{5\pi}{2}$ + ت جا $\frac{5\pi}{2}$)^{٦}

$\therefore$ ع^{٦} $=$ ٦٤ (جتا ١٠π + ت جا ١٠π)

$=$ ٦٤ (١ + ت × ٠) $=$ **٦٤**

مثال ٣ ضع العدد المركب ع $=$ $\frac{١ + \sqrt{٣}\ ت}{١ + ت}$ في الصورة المثلثية ثم اثبت أن ع^{٦} $=$ ٨ ت

الحل

البسط $=$ ١ + $\sqrt{٣}$ ت $=$ ٢ (جتا $\frac{\pi}{3}$ + ت جا $\frac{\pi}{3}$)

المقام $=$ ١ + ت $=$ $\sqrt{٢}$ (جتا $\frac{\pi}{4}$ + ت جا $\frac{\pi}{4}$)

$\therefore$ ع $=$ $\frac{٢ (جتا \frac{\pi}{3} + ت جا \frac{\pi}{3})}{\sqrt{٢} (جتا \frac{\pi}{4} + ت جا \frac{\pi}{4})}$ $=$ $\sqrt{٢}$ (جتا $\frac{\pi}{12}$ + ت جا $\frac{\pi}{12}$)

$\therefore$ ع^{٦} $=$ $[\sqrt{٢}$ (جتا $\frac{\pi}{12}$ + ت جا $\frac{\pi}{12}$)$]^{٦}$

$\therefore$ ع^{٦} $=$ $(\sqrt{٢})^{٦}$ (جتا $\frac{\pi}{12}$ × ٦ + ت جا $\frac{\pi}{12}$ × ٦)

$=$ ٨ (جتا $\frac{\pi}{2}$ + ت جا $\frac{\pi}{2}$) $=$ ٨ ت

نظرية ديموافر — بأس نسبي — موجب

(جتا θ + ت جا θ)$^{\frac{1}{ك}}$ $=$ جتا $\frac{θ + ٢ ر \pi}{ك}$ + ت جا $\frac{θ + ٢ ر \pi}{ك}$

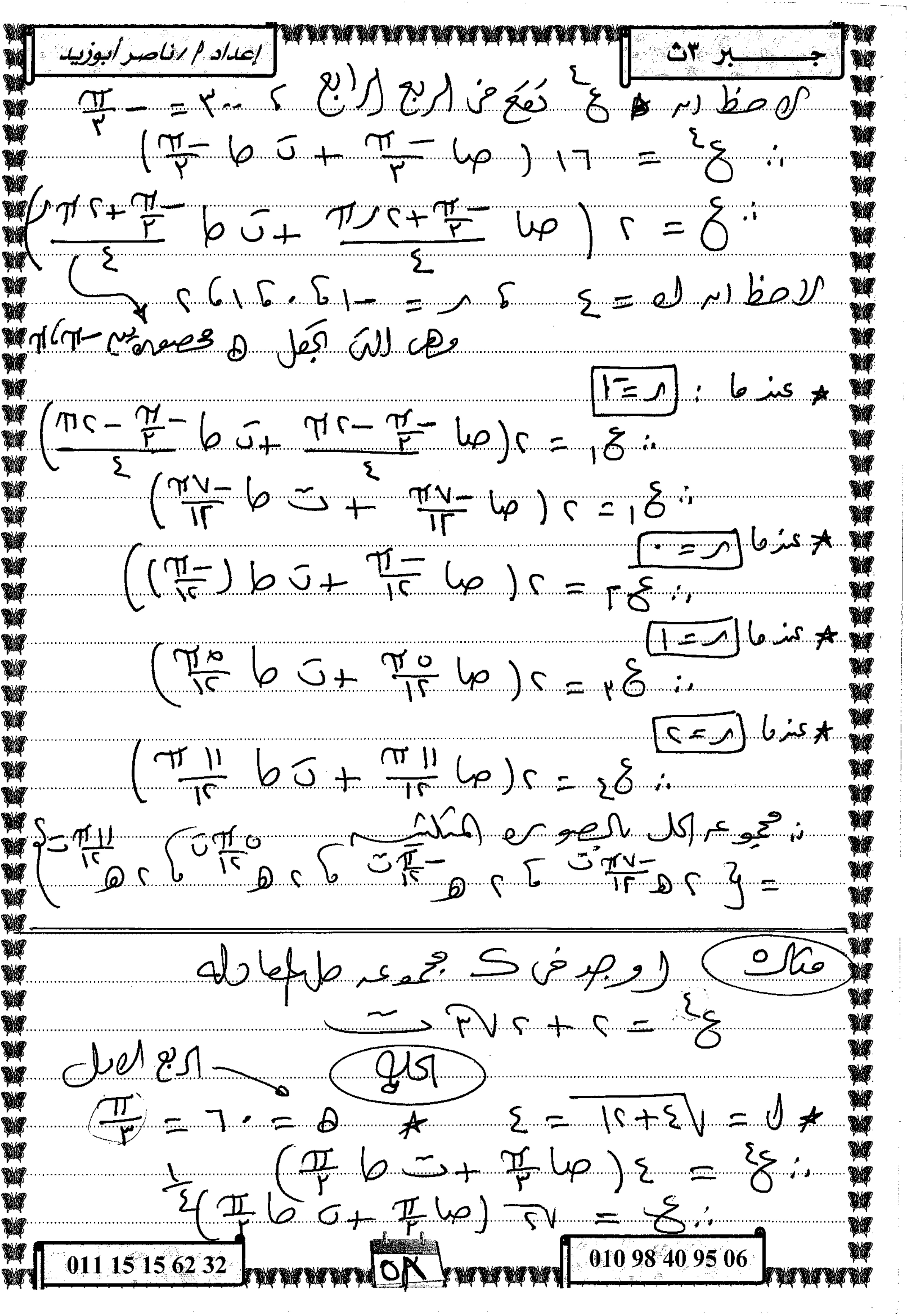
وتستخدم في إيجاد الجذور للعدد المركب حيث ر ∈ ص

مثال ٤ أوجد بالصورة المثلثية والأسية جذور المعادلة

حيث: ع^{٤} $=$ ٨ (١ − $\sqrt{٣}$ ت)

الحل

$\therefore$ ع^{٤} $=$ ٨ − ٨$\sqrt{٣}$ ت ⟵ ل $=$ ١٦ ، θ $=$ $\frac{-\pi}{3}$



إعداد م/ ناصر ابوزيد

نلاحظ ان $ع^{٤}$ تقع في الربع الرابع ، $\theta = ٣٠٠^\circ = -\frac{\pi}{٣}$

$\therefore ع^{٤} = ١٦ \left(\text{جتا} \frac{-\pi}{٣} + ت \, \text{جا} \frac{-\pi}{٣} \right)$

$\therefore ع = ٢ \left(\text{جتا} \frac{\frac{-\pi}{٣} + ٢ر\pi}{٤} + ت \, \text{جا} \frac{\frac{-\pi}{٣} + ٢ر\pi}{٤} \right)$

لاحظ ان $ن = ٤$ ، $ر = -١ ، ٠ ، ١ ، ٢$

وهي التي تجعل θ محصورة بين $-\pi ، \pi$

* عندما: $ر = -١$

$\therefore ع_{١} = ٢ \left(\text{جتا} \frac{\frac{-\pi}{٣} - ٢\pi}{٤} + ت \, \text{جا} \frac{\frac{-\pi}{٣} - ٢\pi}{٤} \right)$

$\therefore ع_{١} = ٢ \left(\text{جتا} \frac{-٧\pi}{١٢} + ت \, \text{جا} \frac{-٧\pi}{١٢} \right)$

* عندما $ر = ٠$

$\therefore ع_{٢} = ٢ \left(\text{جتا} \frac{-\pi}{١٢} + ت \, \text{جا} \left(\frac{-\pi}{١٢}\right) \right)$

* عندما $ر = ١$

$\therefore ع_{٣} = ٢ \left(\text{جتا} \frac{٥\pi}{١٢} + ت \, \text{جا} \frac{٥\pi}{١٢} \right)$

* عندما $ر = ٢$

$\therefore ع_{٤} = ٢ \left(\text{جتا} \frac{١١\pi}{١٢} + ت \, \text{جا} \frac{١١\pi}{١٢} \right)$

$\therefore$ مجموعة الحل بالصورة الأسية $= \{ ٢ هـ^{\frac{-٧\pi}{١٢} ت} ، ٢ هـ^{\frac{-\pi}{١٢} ت} ، ٢ هـ^{\frac{٥\pi}{١٢} ت} ، ٢ هـ^{\frac{١١\pi}{١٢} ت} \}$

مثال أوجد في ك مجموعة حل المعادلة

$ع^{٤} = ٢ + ٢\sqrt{٣} \, ت$

الحل

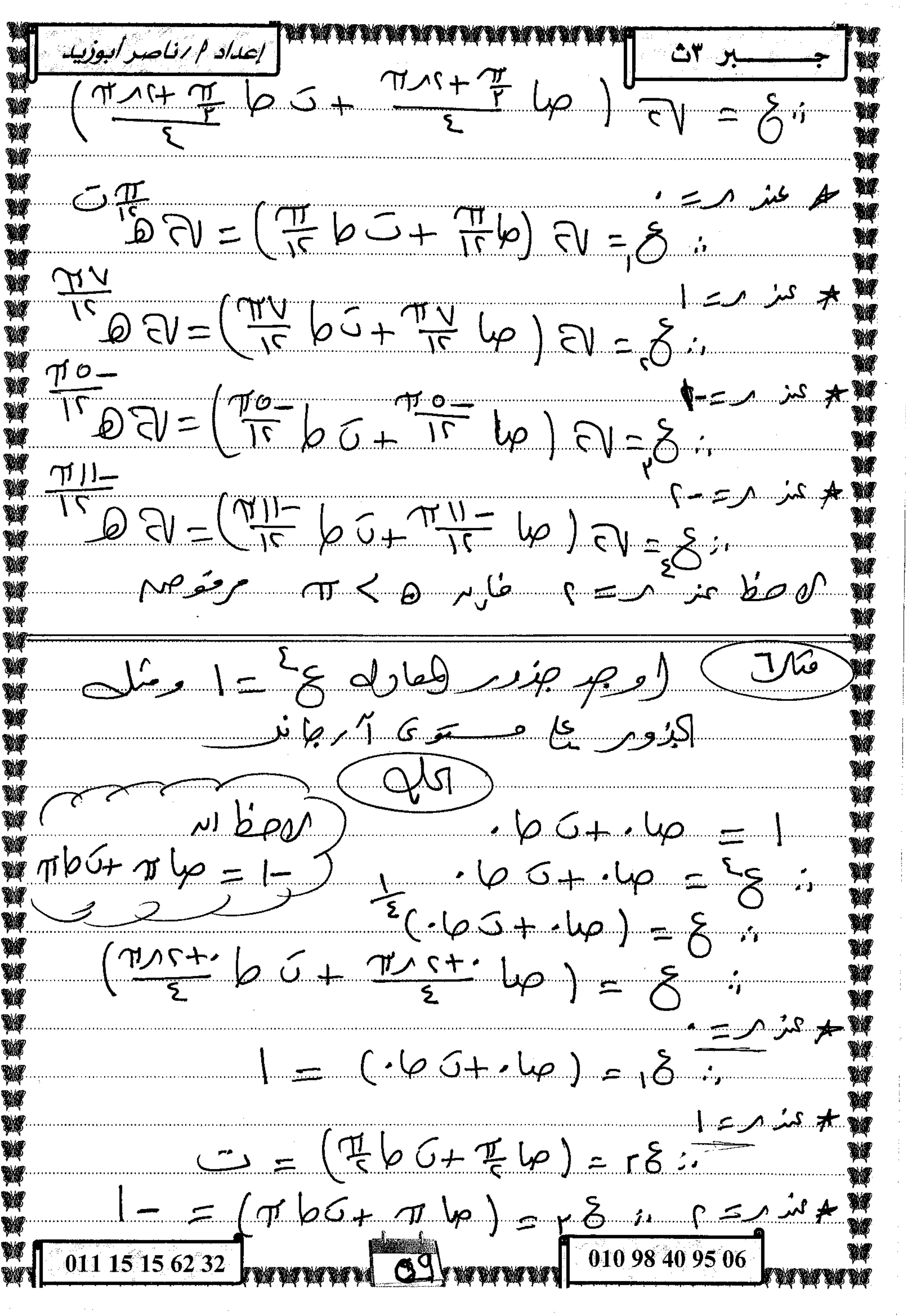
* $ل = \sqrt{٤ + ١٢} = ٤$ ، * $\theta = ٦٠^\circ = \frac{\pi}{٣}$ ← الربع الأول

$\therefore ع^{٤} = ٤ \left(\text{جتا} \frac{\pi}{٣} + ت \, \text{جا} \frac{\pi}{٣} \right)$

$\therefore ع = \sqrt{٢} \left(\text{جتا} \frac{\pi}{٣} + ت \, \text{جا} \frac{\pi}{٣} \right)^{\frac{١}{٤}}$

011 15 15 62 32

010 98 40 95 06



$\therefore$ ع $= \sqrt{2}\left(\text{جتا } \frac{\frac{\pi}{3} + 2ر\pi}{4} + \text{ت جا } \frac{\frac{\pi}{3} + 2ر\pi}{4}\right)$

★ عند ر = ٠

$\therefore$ $ع_1 = \sqrt{2}\left(\text{جتا } \frac{\pi}{12} + \text{ت جا } \frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{2}\, هـ^{\frac{\pi}{12}ت}$

★ عند ر = ١

$\therefore$ $ع_2 = \sqrt{2}\left(\text{جتا } \frac{7\pi}{12} + \text{ت جا } \frac{7\pi}{12}\right) = \sqrt{2}\, هـ^{\frac{7\pi}{12}ت}$

★ عند ر = -١

$\therefore$ $ع_3 = \sqrt{2}\left(\text{جتا } \frac{-5\pi}{12} + \text{ت جا } \frac{-5\pi}{12}\right) = \sqrt{2}\, هـ^{\frac{-5\pi}{12}ت}$

★ عند ر = -٢

$\therefore$ $ع_4 = \sqrt{2}\left(\text{جتا } \frac{-11\pi}{12} + \text{ت جا } \frac{-11\pi}{12}\right) = \sqrt{2}\, هـ^{\frac{-11\pi}{12}ت}$

لاحظ عند ر = ٢ فإن $\theta > \pi$ مرفوض

مثال أوجد جذور المعادلة $ع^4 = 1$ ومثل الجذور على مستوى أرجاند

الحل

لاحظ أن $-1 = \text{جتا } \pi + \text{ت جا } \pi$

$1 = \text{جتا } 0 + \text{ت جا } 0$

$\therefore$ $ع^4 = \text{جتا } 0 + \text{ت جا } 0$

$\therefore$ ع $= (\text{جتا } 0 + \text{ت جا } 0)^{\frac{1}{4}}$

$\therefore$ ع $= \left(\text{جتا } \frac{0 + 2ر\pi}{4} + \text{ت جا } \frac{0 + 2ر\pi}{4}\right)$

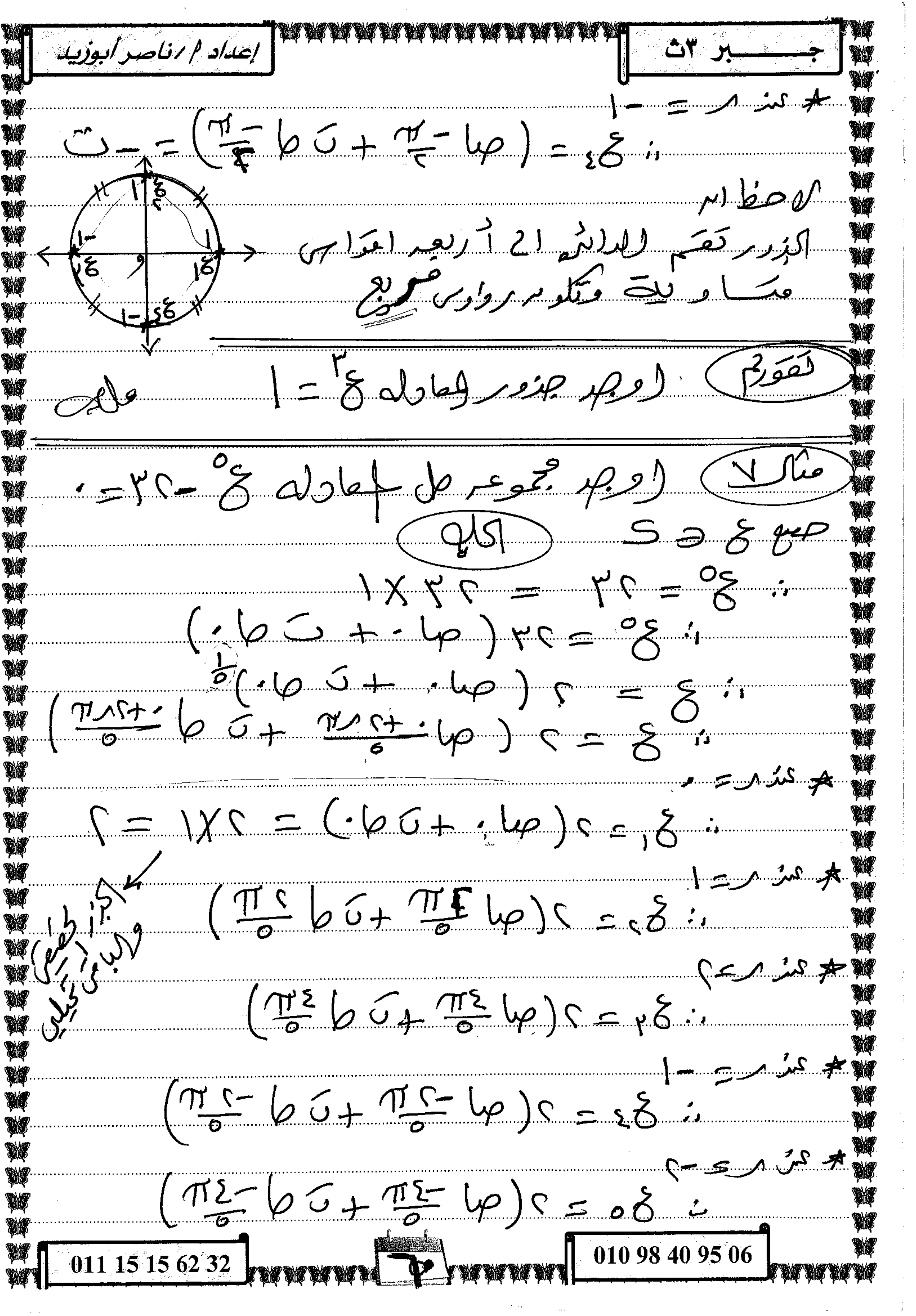
★ عند ر = ٠

$\therefore$ $ع_1 = (\text{جتا } 0 + \text{ت جا } 0) = 1$

★ عند ر = ١

$\therefore$ $ع_2 = \left(\text{جتا } \frac{\pi}{2} + \text{ت جا } \frac{\pi}{2}\right) =$ ت

★ عند ر = ٢ $\therefore$ $ع_3 = (\text{جتا } \pi + \text{ت جا } \pi) = -1$



* عند ر = −١

$\therefore$ ع$_٤$ = (جتا $\frac{-\pi}{٢}$ + ت جا $\frac{-\pi}{٢}$) = −ت

لاحظ أن

الجذور تقسم الدائرة إلى أربعة أقواس متساوية وتكون رؤوس مربع

تقويم أوجد جذور المعادلة ع^٣ = ١ حله

مثال ٧ أوجد مجموعة حل المعادلة ع^٥ − ٣٢ = ٠ حيث ع ∈ ك

الحل

$\therefore$ ع^٥ = ٣٢ = ٣٢ × ١

$\therefore$ ع^٥ = ٣٢ (جتا ٠ + ت جا ٠)

$\therefore$ ع = ٢ (جتا ٠ + ت جا ٠)$^{\frac{1}{٥}}$

$\therefore$ ع = ٢ (جتا $\frac{٠ + ٢ر\pi}{٥}$ + ت جا $\frac{٠ + ٢ر\pi}{٥}$)

* عند ر = ٠

$\therefore$ ع$_١$ = ٢ (جتا ٠ + ت جا ٠) = ٢ × ١ = ٢

الجزء الحقيقي والباقي تخيلي

* عند ر = ١

$\therefore$ ع$_٢$ = ٢ (جتا $\frac{٢\pi}{٥}$ + ت جا $\frac{٢\pi}{٥}$)

* عند ر = ٢

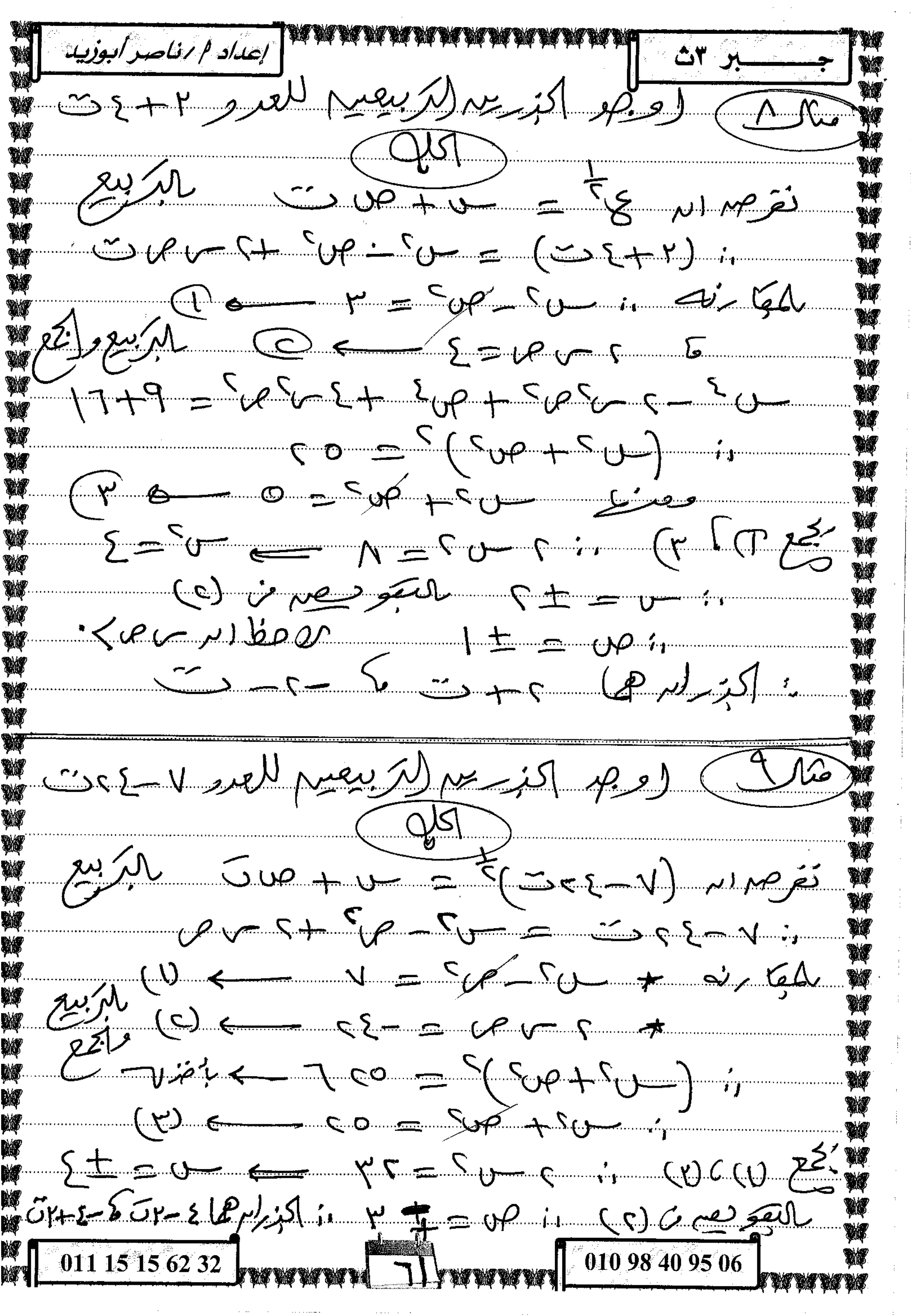
$\therefore$ ع$_٣$ = ٢ (جتا $\frac{٤\pi}{٥}$ + ت جا $\frac{٤\pi}{٥}$)

* عند ر = −١

$\therefore$ ع$_٤$ = ٢ (جتا $\frac{-٢\pi}{٥}$ + ت جا $\frac{-٢\pi}{٥}$)

* عند ر = −٢

$\therefore$ ع$_٥$ = ٢ (جتا $\frac{-٤\pi}{٥}$ + ت جا $\frac{-٤\pi}{٥}$)



مثال ٨ أوجد الجذرين التربيعيين للعدد ٣ + ٤ت

الحل

نفرض أن $ع^{\frac{1}{2}}$ = س + ص ت بالتربيع

∴ (٣ + ٤ت) = س² − ص² + ٢ س ص ت

بالمقارنة ∴ س² − ص² = ٣ ← (١)

، ٢ س ص = ٤ ← (٢) بالتربيع والجمع

س⁴ − ٢س²ص² + ص⁴ + ٤س²ص² = ٩ + ١٦

∴ (س² + ص²)² = ٢٥

ومنها س² + ص² = ٥ ← (٣)

بجمع (١)، (٣) ∴ ٢س² = ٨ ⟸ س² = ٤

∴ س = ±٢ بالتعويض في (٢)

∴ ص = ±١ لاحظ أن س ص > ٠

∴ الجذران هما ٢ + ت ، −٢ − ت

مثال ٩ أوجد الجذرين التربيعيين للعدد ٧ − ٢٤ت

الحل

نفرض أن $(٧ − ٢٤ت)^{\frac{1}{2}}$ = س + ص ت بالتربيع

∴ ٧ − ٢٤ت = س² − ص² + ٢ س ص ت

بالمقارنة * س² − ص² = ٧ ← (١)

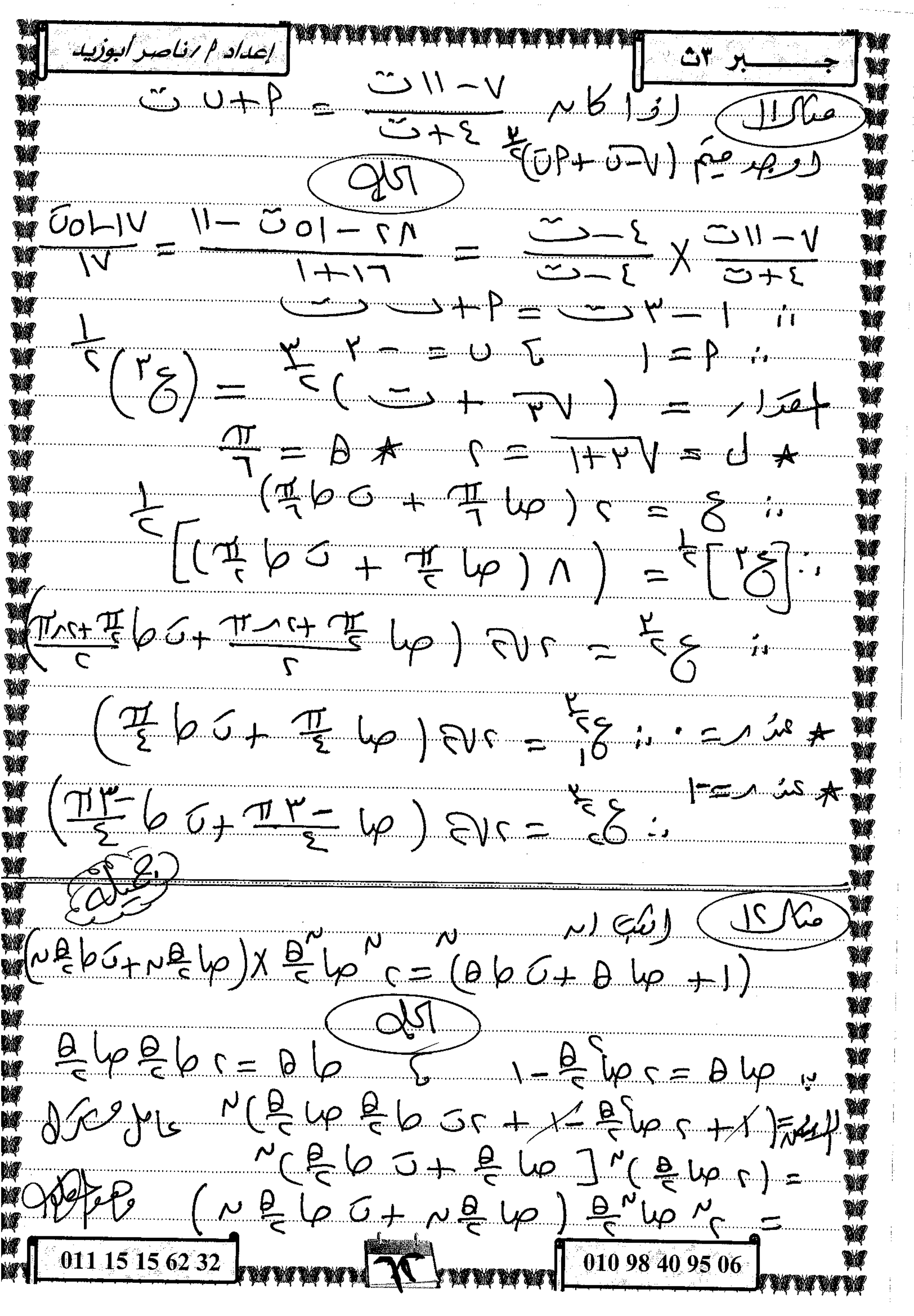
* ٢ س ص = −٢٤ ← (٢) بالتربيع والجمع

∴ (س² + ص²)² = ٦٢٥ ← بأخذ √

∴ س² + ص² = ٢٥ ← (٣)

بجمع (١)، (٣) ∴ ٢س² = ٣٢ ⟸ س = ±٤

بالتعويض في (٢) ∴ ص = ∓٣ ∴ الجذران هما ٤ − ٣ت ، −٤ + ٣ت



مثال ١١ اذا كان $\frac{\text{٧} - \text{١١ت}}{\text{٤} + \text{ت}} = \text{أ} + \text{ب ت}$

أوجد قيم $(\sqrt{-\text{ب}} + \text{أ ت})^{\frac{3}{2}}$

الحل

$\frac{\text{٧} - \text{١١ت}}{\text{٤} + \text{ت}} \times \frac{\text{٤} - \text{ت}}{\text{٤} - \text{ت}} = \frac{\text{٢٨} - \text{١١} - \text{٥١ت}}{\text{١٦} + \text{١}} = \frac{\text{١٧} - \text{٥١ت}}{\text{١٧}}$

∴ ١ − ٣ت = أ + ب ت

∴ أ = ١ ، ب = −٣

المقدار = $(\sqrt{3} + \text{ت})^{\frac{3}{2}} = (\text{ع}^3)^{\frac{1}{2}}$

★ ل = $\sqrt{3+1}$ = ٢ ★ $\theta = \frac{\pi}{6}$

∴ ع = ٢ (جتا $\frac{\pi}{6}$ + ت جا $\frac{\pi}{6}$)

∴ $[\text{ع}^3]^{\frac{1}{2}}$ = $[\,8\,($جتا $\frac{\pi}{2}$ + ت جا $\frac{\pi}{2}$$)\,]^{\frac{1}{2}}$

∴ $\text{ع}^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2}$ (جتا $\frac{\frac{\pi}{2} + 2\text{ر}\pi}{2}$ + ت جا $\frac{\frac{\pi}{2} + 2\text{ر}\pi}{2}$)

★ عند ر = ٠ ∴ $\text{ع}_1^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2}$ (جتا $\frac{\pi}{4}$ + ت جا $\frac{\pi}{4}$)

★ عند ر = −١ ∴ $\text{ع}_2^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2}$ (جتا $\frac{-3\pi}{4}$ + ت جا $\frac{-3\pi}{4}$)

مثال ١٢ اثبت ان

$(1 + \text{جتا}\,\theta + \text{ت جا}\,\theta)^{\text{ن}} = 2^{\text{ن}}\ \text{جتا}^{\text{ن}}\frac{\theta}{2} \times (\text{جتا}\,\frac{\theta}{2}\text{ن} + \text{ت جا}\,\frac{\theta}{2}\text{ن})$

الحل

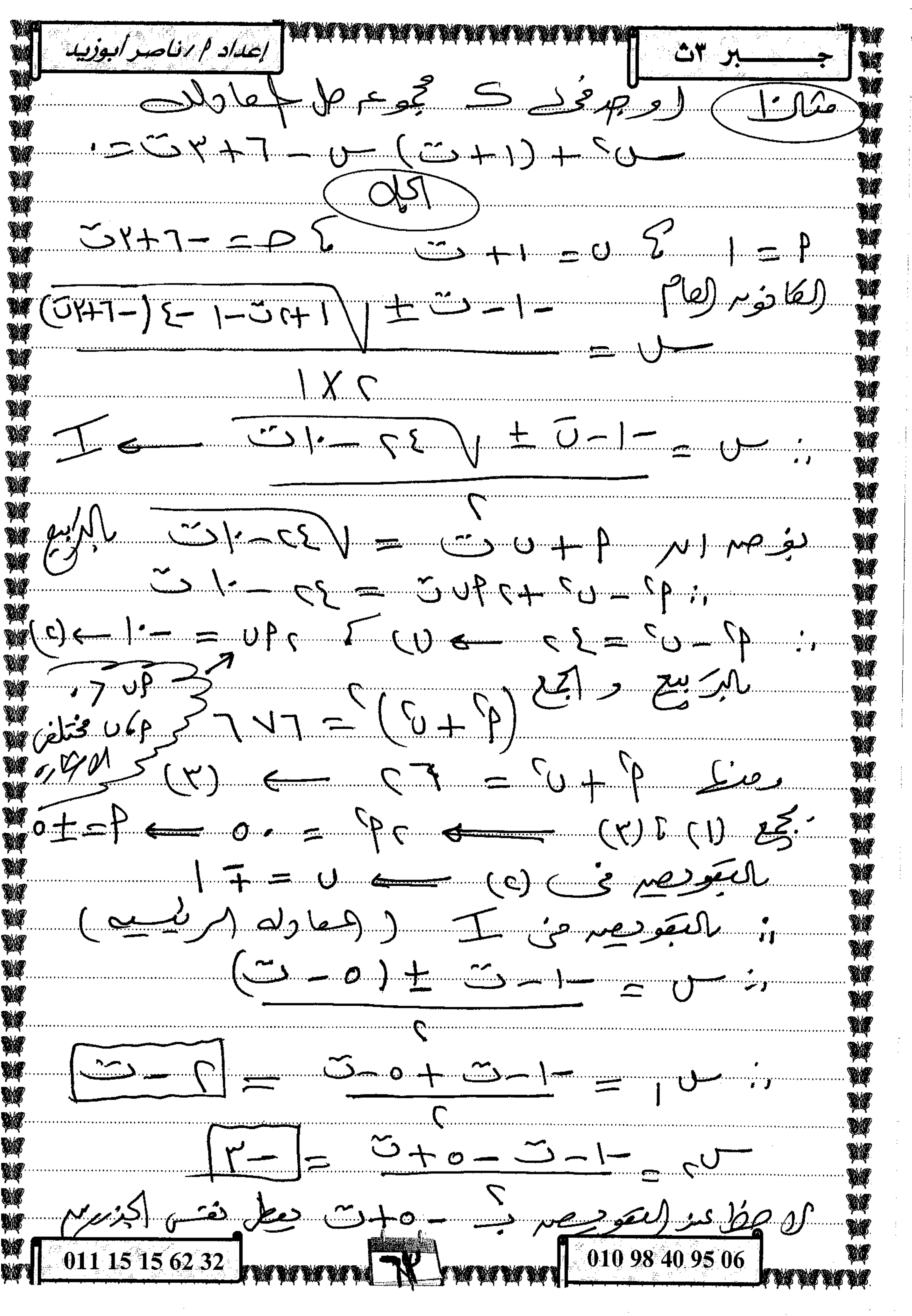
∵ جتا θ = ٢ $\text{جتا}^2\frac{\theta}{2}$ − ١ ، جا θ = ٢ جا $\frac{\theta}{2}$ جتا $\frac{\theta}{2}$

المقدار = $(1 + 2\,\text{جتا}^2\frac{\theta}{2} - 1 + 2\text{ت جتا}\frac{\theta}{2}\text{ جا}\frac{\theta}{2})^{\text{ن}}$ عامل مشترك

= $(2\,\text{جتا}\frac{\theta}{2})^{\text{ن}}\ [\text{جتا}\frac{\theta}{2} + \text{ت جا}\frac{\theta}{2}]^{\text{ن}}$

= $2^{\text{ن}}\ \text{جتا}^{\text{ن}}\frac{\theta}{2}\ (\text{جتا}\frac{\theta}{2}\text{ن} + \text{ت جا}\frac{\theta}{2}\text{ن})$

مع تحياتي



مثال (١٠) أوجد مجموعة حل المعادلة

$\text{س}^2 + (1 + \text{ت})\,\text{س} - 6 + 3\text{ت} = 0$

الحل

$\text{أ} = 1$ ، $\text{ب} = 1 + \text{ت}$ ، $\text{جـ} = -6 + 3\text{ت}$

القانون العام

$$\text{س} = \frac{-1 - \text{ت} \pm \sqrt{(1+\text{ت})^2 - 4 \times 1 \times (-6 + 3\text{ت})}}{2 \times 1}$$

$$\therefore \text{س} = \frac{-1 - \text{ت} \pm \sqrt{24 - 10\text{ت}}}{2} \longrightarrow I$$

بفرض أن $\text{أ} + \text{ب}\,\text{ت} = \sqrt{24 - 10\text{ت}}$ بالتربيع

$\therefore \text{أ}^2 - \text{ب}^2 + 2\text{أ}\text{ب}\,\text{ت} = 24 - 10\text{ت}$

$\therefore \text{أ}^2 - \text{ب}^2 = 24 \longrightarrow (1)$ ، $2\text{أ}\text{ب} = -10 \longrightarrow (2)$

$\text{أ}\text{ب} < 0$ ، أ، ب مختلفي الإشارة

بالتربيع والجمع $(\text{أ}^2 + \text{ب}^2)^2 = 676$

ومنها $\text{أ}^2 + \text{ب}^2 = 26 \longrightarrow (3)$

بجمع (١) ، (٣) $\longrightarrow 2\text{أ}^2 = 50 \longrightarrow \text{أ} = \pm 5$

بالتعويض في (٢) $\longrightarrow \text{ب} = \mp 1$

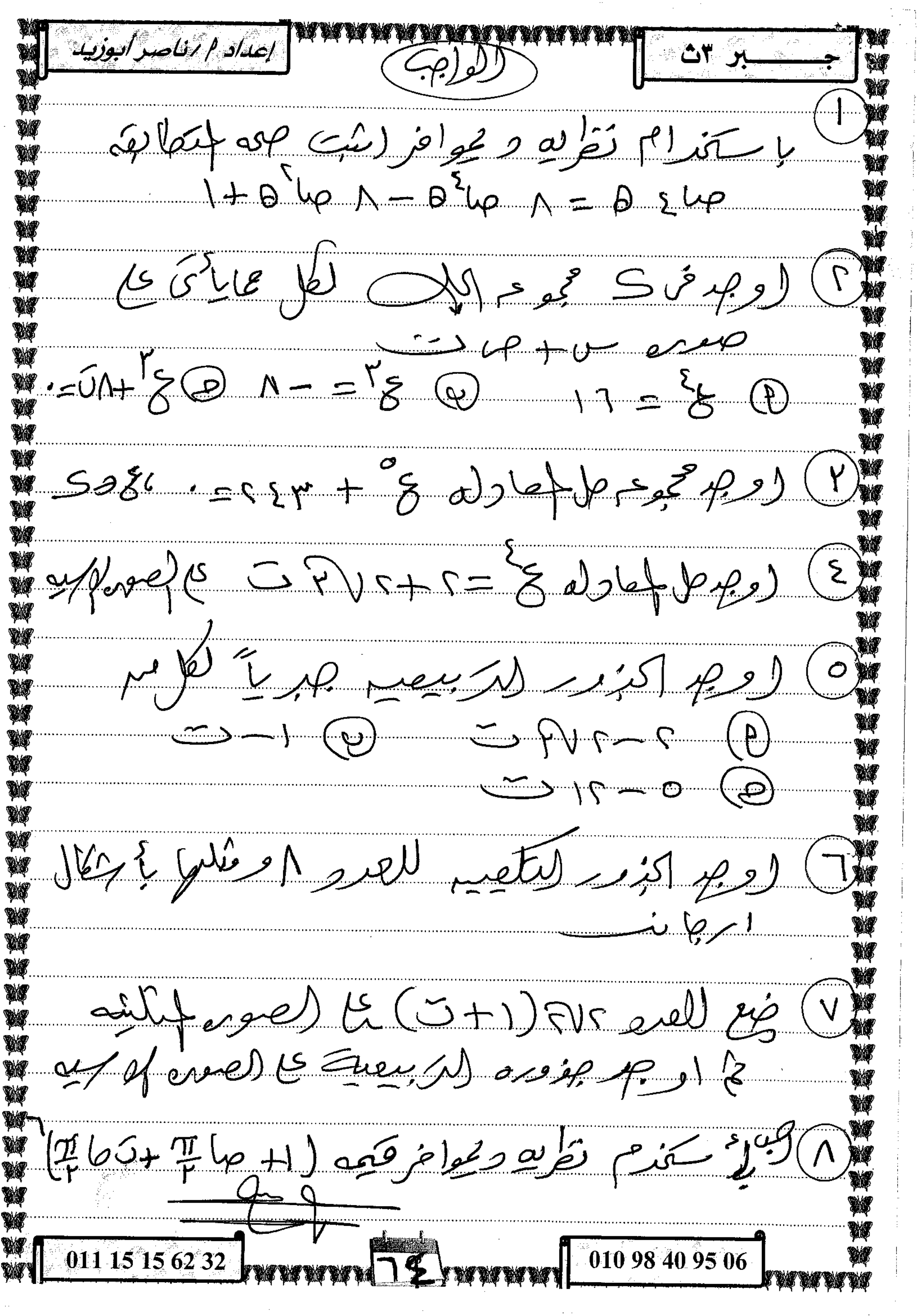
$\therefore$ بالتعويض في I (المعادلة الرئيسية)

$$\therefore \text{س} = \frac{-1 - \text{ت} \pm (5 - \text{ت})}{2}$$

$$\therefore \text{س}_1 = \frac{-1 - \text{ت} + 5 - \text{ت}}{2} = \boxed{2 - \text{ت}}$$

$$\text{س}_2 = \frac{-1 - \text{ت} - 5 + \text{ت}}{2} = \boxed{-3}$$

لاحظ عند التعويض بـ $-5 + \text{ت}$ يعطي نفس الجذرين



إعداد م / ناصر أبوزيد

الواجب

(١) باستخدام نظرية ديموافر اثبت صحة المتطابقة
جتا ٤ هـ = ٨ جتا^{٤} هـ − ٨ جتا^{٢} هـ + ١

(٢) اوجد في ك مجموعة الحل لكل مما يأتي علماً بأن ع صورته س + ص ت
(أ) ع^{٤} = ١٦ (ب) ع^{٣} = −٨ (ج) ع^{٣} + ٨ت = ٠

(٣) اوجد مجموعة حل المعادلة ع^{٥} + ٢٤٣ = ٠ ، ع ∈ ك

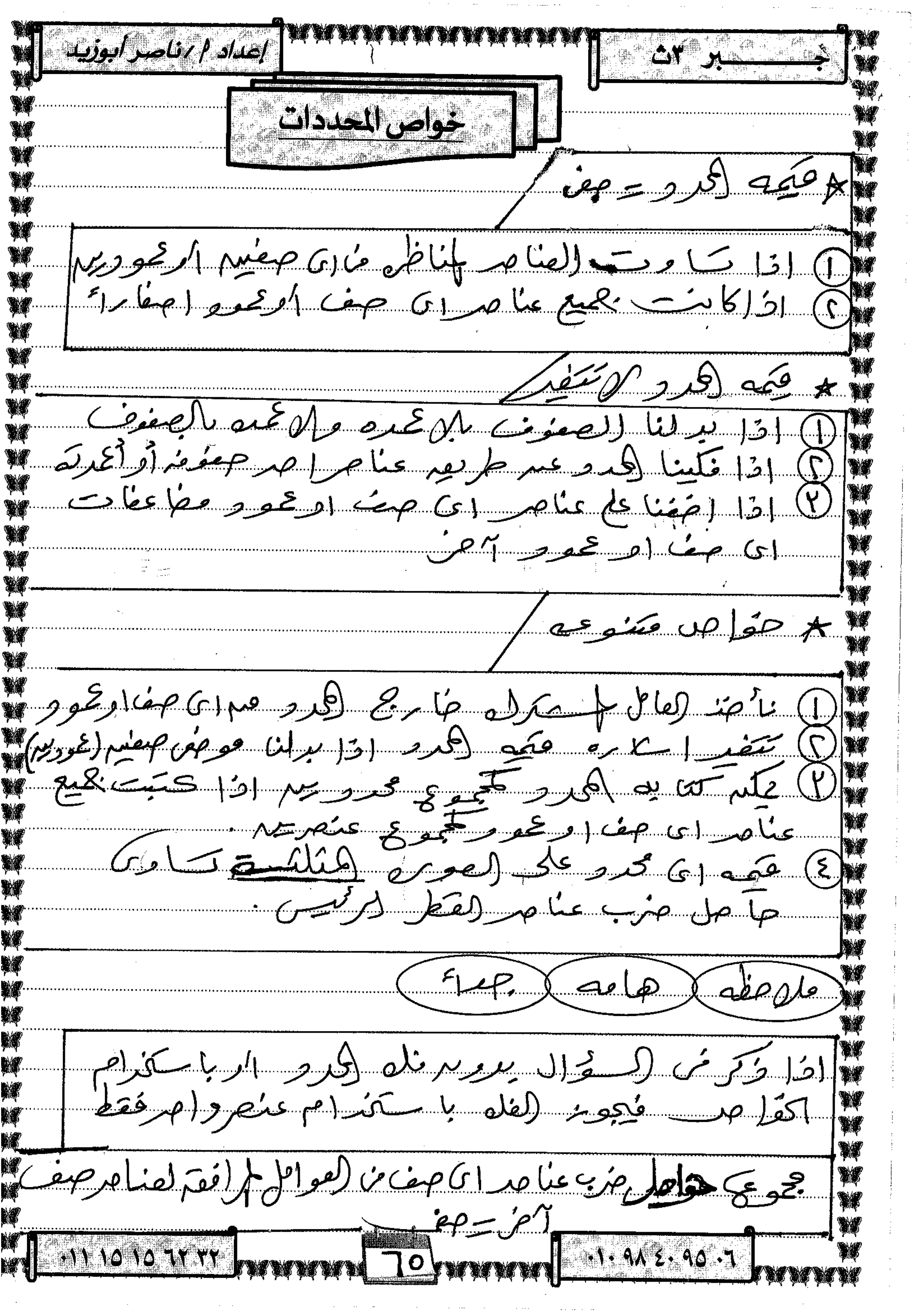
(٤) اوجد حل المعادلة ع^{٤} = ٢ + ٢√٣ ت في الصورة الأسية

(٥) اوجد الجذور التربيعية جبرياً لكل من
(أ) ٢ − ٢√٣ ت (ب) ١ − ت
(ج) ٥ − ١٢ ت

(٦) اوجد الجذور التكعيبية للعدد ٨ ومثلها بأشكال ارجاند

(٧) ضع العدد ٢√٢ (١ + ت) على الصورة المثلثية ثم اوجد جذوره التربيعية في الصورة الأسية

(٨) ابدأ استخدم نظرية ديموافر قيمة (١ + جا $\frac{\pi}{2}$ + ت جتا $\frac{\pi}{2}$)^{٦}



إعداد م / ناصر أبوزيد

خواص المحددات

★ قيمة المحدد = صفر

① اذا تساوت العناصر المناظرة في اي صفين او عمودين
② اذا كانت جميع عناصر اي صف او عمود اصفاراً

★ قيمة المحدد لا تتغير

① اذا بدلنا الصفوف بالأعمدة والأعمدة بالصفوف
② اذا فككنا المحدد عن طريق عناصر احد صفوفه أو أعمدته
③ اذا اضفنا الى عناصر اي صف او عمود مضاعفات اي صف او عمود آخر

★ خواص متنوعة

① نأخذ العامل المشترك خارج المحدد من اي صف او عمود
② تتغير اشارة قيمة المحدد اذا بدلنا موضع صفين (عمودين)
③ يمكن كتابة المحدد كمجموع محددين اذا كتبت جميع عناصر اي صف او عمود كمجموع عنصرين.
④ قيمة اي محدد على الصورة **المثلثية** تساوي حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي.

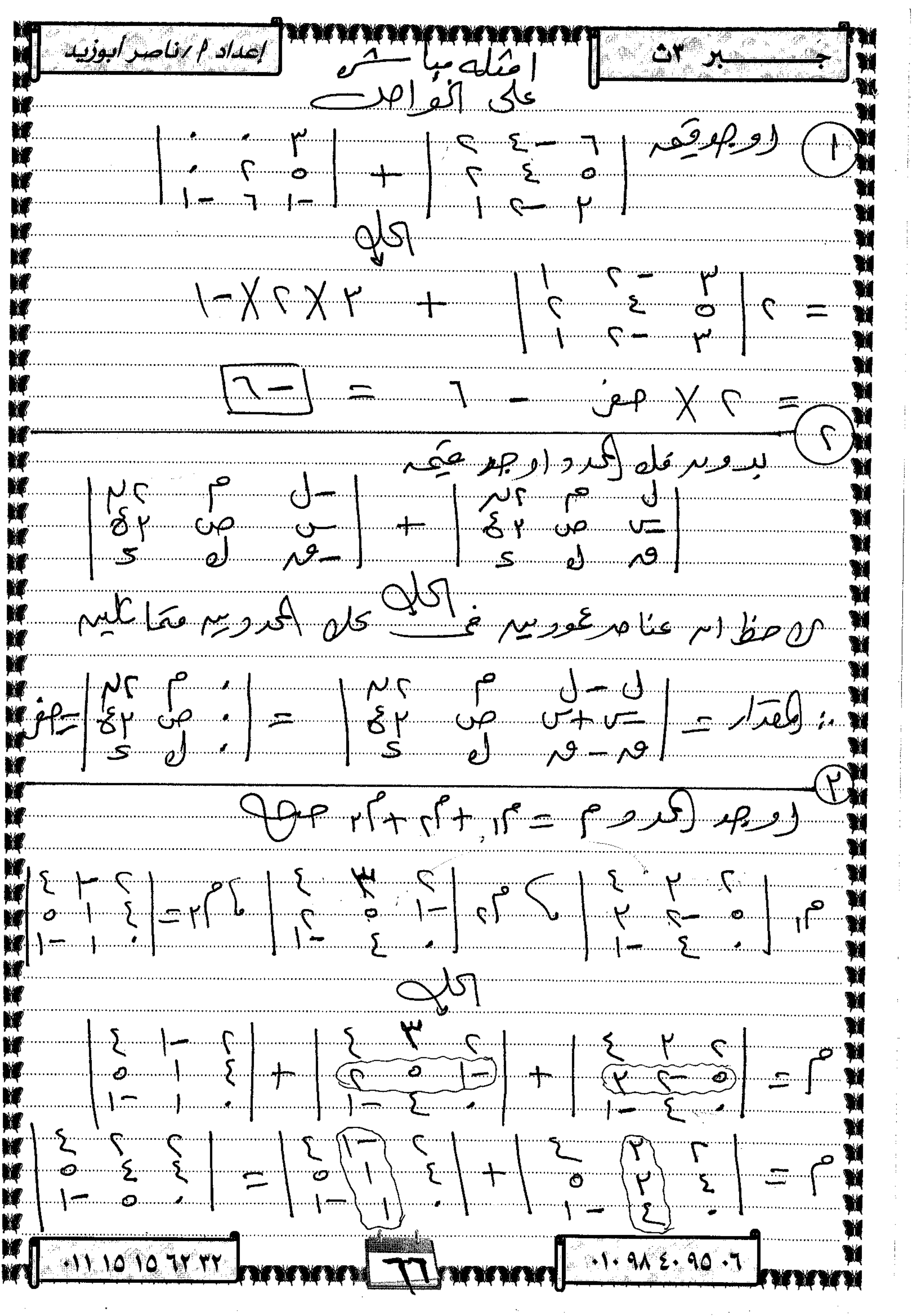
ملاحظة هامة جداً

اذا ذكر في السؤال بدون فك المحدد او باستخدام الخواص فيجوز الفك باستخدام عنصر واحد فقط

مجموع **حواصل** ضرب عناصر اي صف في العوامل المرافقة لعناصر صف آخر = صفر

٠١١١٥١٥٦٢٣٢

٠١٠٩٨٤٠٩٥٠٦



إعداد م/ ناصر ابوزيد

امثله مباشره على الخواص

(١) اوجد قيمة

$$\begin{vmatrix} 6 & -4 & 2 \\ 5 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ -1 & 6 & -1 \end{vmatrix}$$

الحل

$$= 2\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} + 3 \times 2 \times -1$$

$$= 2 \times \text{صفر} - 6 = \boxed{-6}$$

(٢) بدون فك المحدد اوجد قيمة

$$\begin{vmatrix} ل & م & 2ن \\ س & ص & 2ع \\ هـ & ك & د \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -ل & م & 2ن \\ -س & ص & 2ع \\ -هـ & ك & د \end{vmatrix}$$

الحل

نلاحظ ان عناصر عمودين في كلا المحددين متماثلين

$$\therefore \text{المقدار} = \begin{vmatrix} ل-ل & م & 2ن \\ س+-س & ص & 2ع \\ هـ-هـ & ك & د \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & م & 2ن \\ 0 & ص & 2ع \\ 0 & ك & د \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

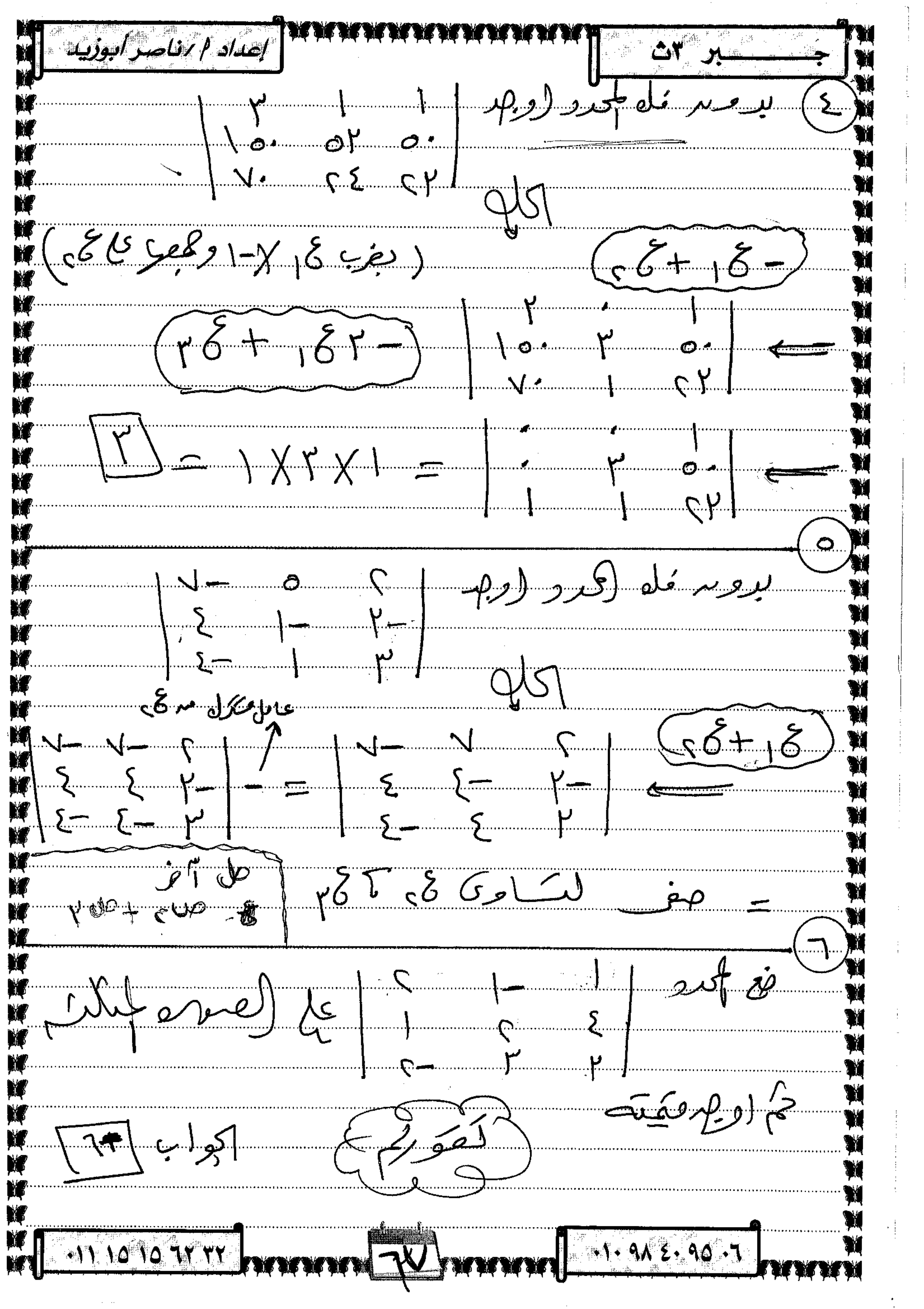
(٣) اوجد المحدد م = م١ + م٢ + م٣ حيث

$$م_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 5 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} ، م_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} ، م_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

الحل

$$م = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 5 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$م = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}$$



④ بدون فك المحدد أوجد

١	١	٣
٥٠	٥٢	١٥٠
٤٢	٤٤	٧٠

الحل

-ع١ + ع٢ (بضرب ع١ × -١ وجمعها على ع٢)

⟸

١	٠	٢
٥٠	٣	١٥٠
٤٢	١	٧٠

-٣ع١ + ع٣

⟸

١	٠	٠
٥٠	٣	٠
٤٢	١	١

= ١ × ٣ × ١ = **٣**

---

⑤ بدون فك المحدد أوجد

٢	٥	-٧
-٢	-١	٤
٣	١	-٤

الحل

ع١ + ع٢ ⟸

٢	٧	-٧
-٢	-٤	٤
٢	٤	-٤

= -

٢	-٧	-٧
-٢	٤	٤
٣	-٤	-٤

(عامل مشترك من ع٢)

= صفر لتساوي ع٢ ، ع٣

---

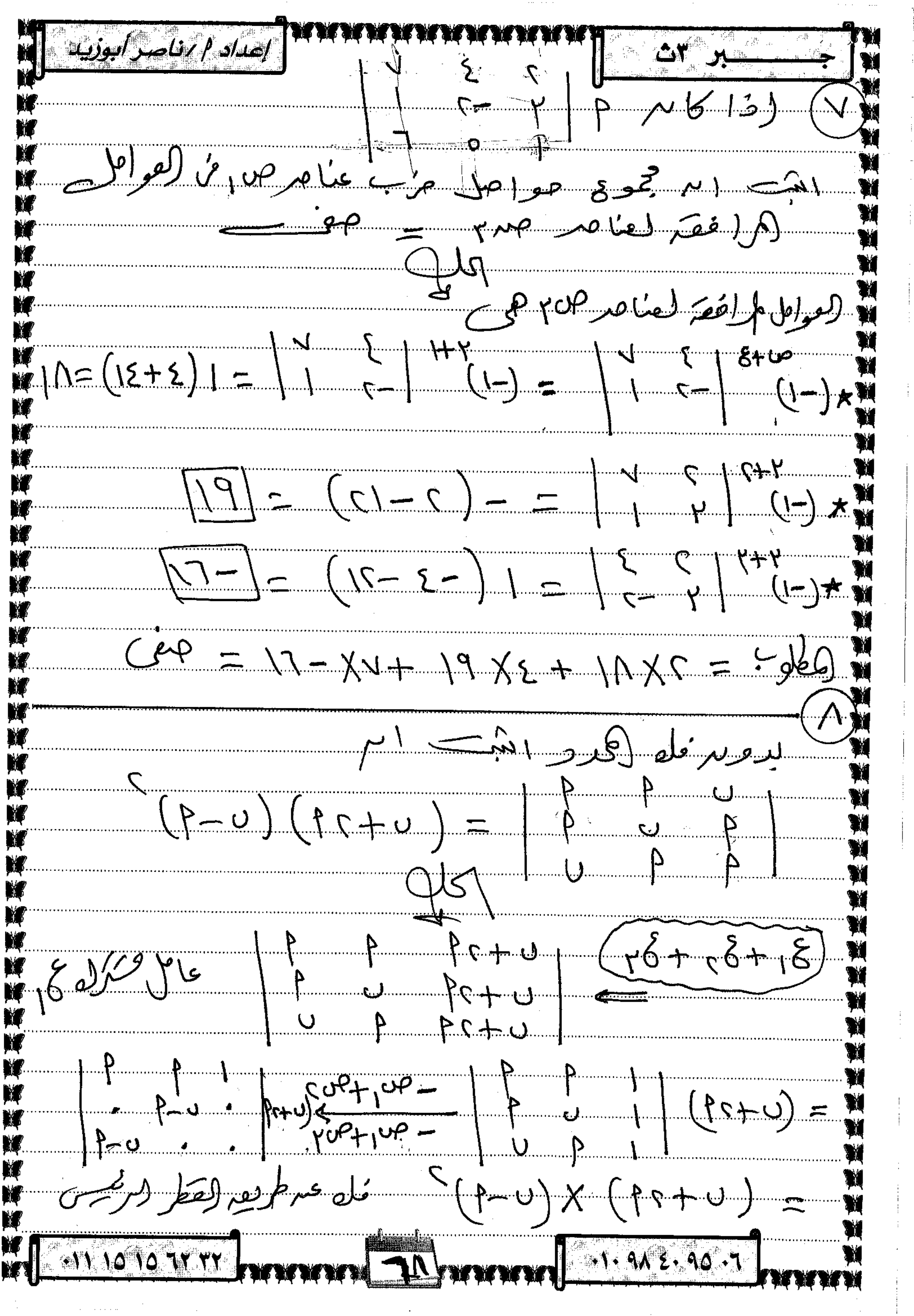
⑥ ضع المحدد

١	-١	٢
٤	٢	١
٢	٣	-٢

على الصورة المثلثية

ثم أوجد قيمته

الجواب **٦٣**



(٧) إذا كان أ = | ٢ ٤ ٧ ؛ ٢ −٣ ١ ؛ ١ ٥ ٦ |

أثبت أن مجموع حواصل ضرب عناصر ص١ في العوامل المرافقة لعناصر ص٢ = صفر

الحل

العوامل المرافقة لعناصر ص٢ هي

* (−١)^(٢+١) | ٤ ٧ ؛ −٢ ١ | = (−١)^(١+٢) | ٤ ٧ ؛ −٢ ١ | = ١ (٤ + ١٤) = ١٨

* (−١)^(٢+٢) | ٢ ٧ ؛ ١ ١ | = − (٢ − ٢١) = ١٩

* (−١)^(٢+٣) | ٢ ٤ ؛ ١ −٢ | = ١ (−٤ − ١٢) = −١٦

المطلوب = ٢ × ١٨ + ٤ × ١٩ + ٧ × −١٦ = صفر

(٨) بدون فك المحدد أثبت أن

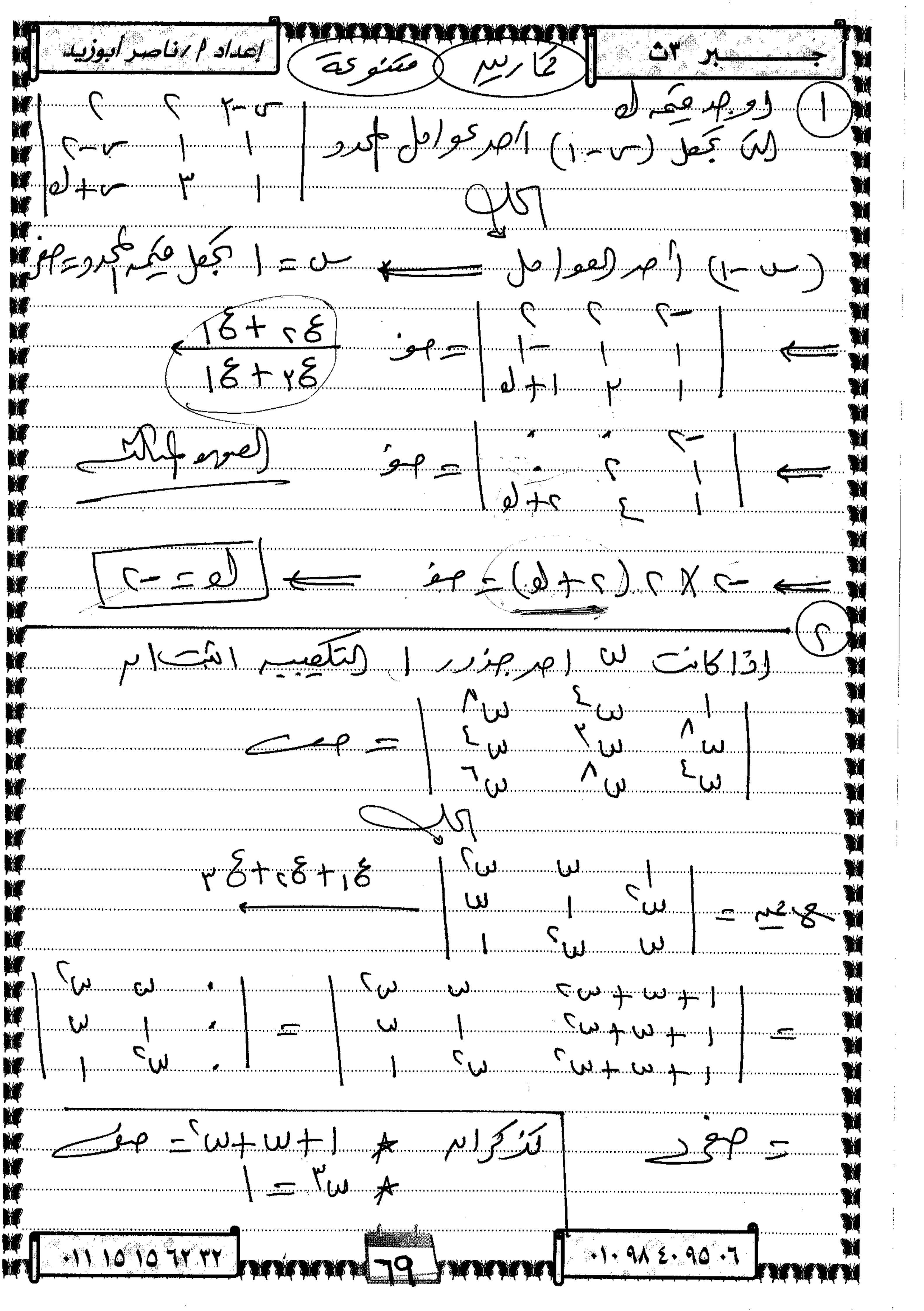
| ب أ أ ؛ أ ب أ ؛ أ أ ب | = (ب + ٢أ) (ب − أ)^٢

الحل

ع١ + ع٢ + ع٣ ⟵ | ب+٢أ أ أ ؛ ب+٢أ ب أ ؛ ب+٢أ أ ب | عامل مشترك ع١

= (ب + ٢أ) | ١ أ أ ؛ ١ ب أ ؛ ١ أ ب | ⟵ (ص٢ − ص١ ، ص٣ − ص١) (ب + ٢أ) | ١ أ أ ؛ ٠ ب−أ ٠ ؛ ٠ ٠ ب−أ |

= (ب + ٢أ) × (ب − أ)^٢ فك عن طريق القطر الرئيسي



(١) أوجد قيمة ك التي تجعل (س - ١) أحد عوامل المحدد

$$\begin{vmatrix} ٢ & ٢ & \text{س}-٣ \\ \text{س}-٢ & ١ & ١ \\ \text{س}+\text{ك} & ٣ & ١ \end{vmatrix}$$

الحل

(س - ١) أحد العوامل ⟸ س = ١ تجعل قيمة المحدد = صفر

$$\Longleftarrow \begin{vmatrix} ٢ & ٢ & -٢ \\ -١ & ١ & ١ \\ ١+\text{ك} & ٢ & ١ \end{vmatrix} = \text{صفر} \qquad \longleftarrow \frac{\text{ع}_٢ + \text{ع}_١}{\text{ع}_٣ + \text{ع}_٢}$$

$$\Longleftarrow \begin{vmatrix} ٠ & ٢ & -٢ \\ ٠ & ٠ & ١ \\ ٢+\text{ك} & ٤ & ١ \end{vmatrix} = \text{صفر} \qquad \text{الصورة المثلثية}$$

$$\Longleftarrow -٢ \times ٢ (٢ + \text{ك}) = \text{صفر} \Longleftarrow \boxed{\text{ك} = -٢}$$

(٢) إذا كانت ω أحد جذور الواحد التكعيبية أثبت أن

$$\begin{vmatrix} \omega^٨ & \omega^٤ & ١ \\ \omega^٤ & \omega^٢ & \omega^٨ \\ \omega^٦ & \omega^٨ & \omega^٤ \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

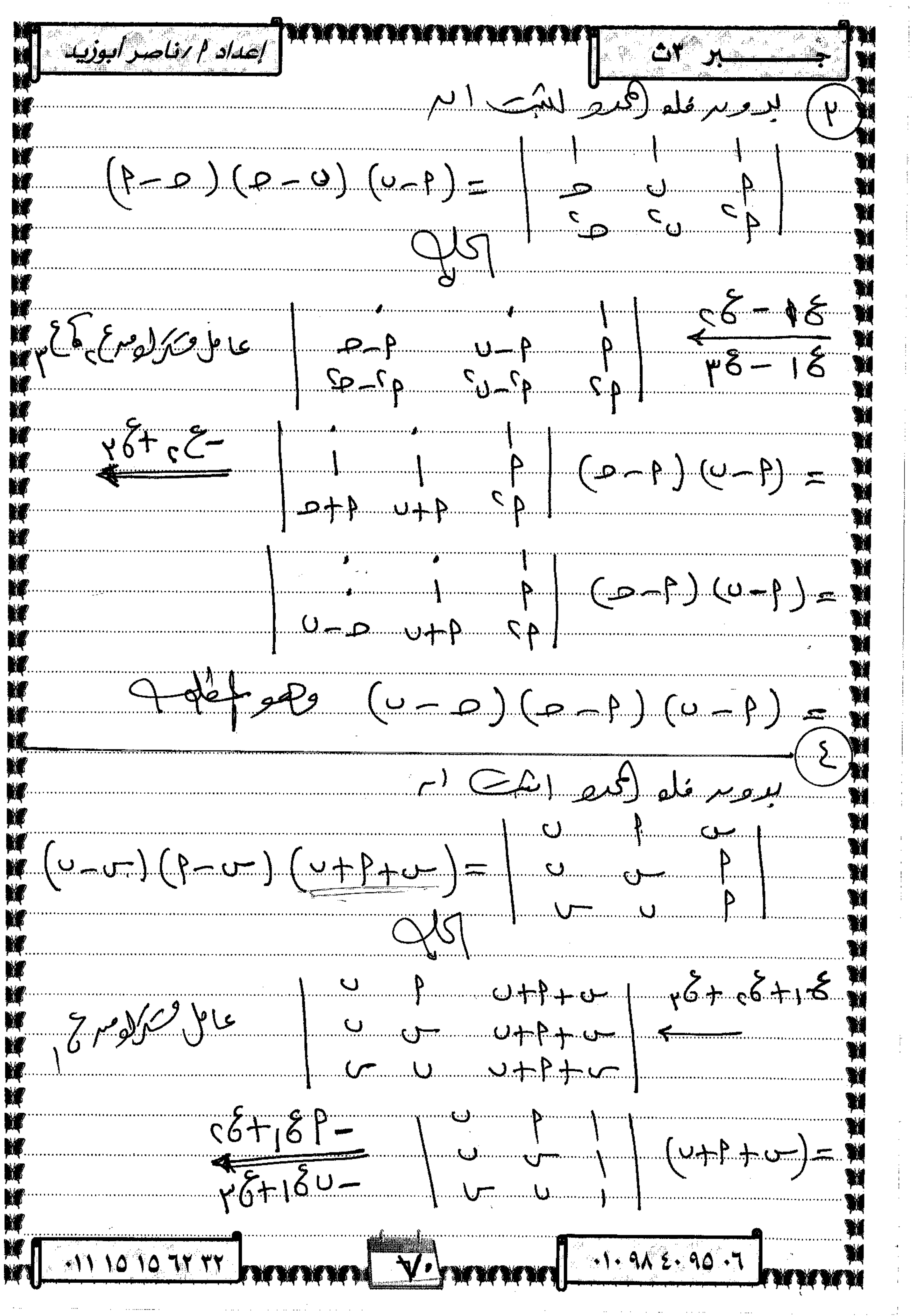
الحل

$$\text{الطرف الأيمن} = \begin{vmatrix} \omega^٢ & \omega & ١ \\ \omega & ١ & \omega^٢ \\ ١ & \omega^٢ & \omega \end{vmatrix} \longleftarrow \text{ع}_١ + \text{ع}_٢ + \text{ع}_٣$$

$$= \begin{vmatrix} \omega^٢ & \omega & ١+\omega+\omega^٢ \\ \omega & ١ & ١+\omega+\omega^٢ \\ ١ & \omega^٢ & ١+\omega+\omega^٢ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \omega^٢ & \omega & ٠ \\ \omega & ١ & ٠ \\ ١ & \omega^٢ & ٠ \end{vmatrix}$$

= صفر

تذكر أن
★ $١ + \omega + \omega^٢ = \text{صفر}$
★ $\omega^٣ = ١$



(٣) بدون فك المحدد اثبت أن

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ أ & ب & جـ \\ أ^2 & ب^2 & جـ^2 \end{vmatrix} = (أ - ب)(ب - جـ)(جـ - أ)$$

الحل

$ع_1 - ع_2$ ، $ع_1 - ع_3$ ←

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ أ & أ - ب & أ - جـ \\ أ^2 & أ^2 - ب^2 & أ^2 - جـ^2 \end{vmatrix}$$ عامل مشترك من $ع_2$ ، $ع_3$

$$= (أ - ب)(أ - جـ) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ أ & 1 & 1 \\ أ^2 & أ + ب & أ + جـ \end{vmatrix}$$ $-ع_2 + ع_3$ ←

$$= (أ - ب)(أ - جـ) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ أ & 1 & 0 \\ أ^2 & أ + ب & جـ - ب \end{vmatrix}$$

$= (أ - ب)(أ - جـ)(جـ - ب)$ وهو المطلوب

(٤) بدون فك المحدد اثبت أن

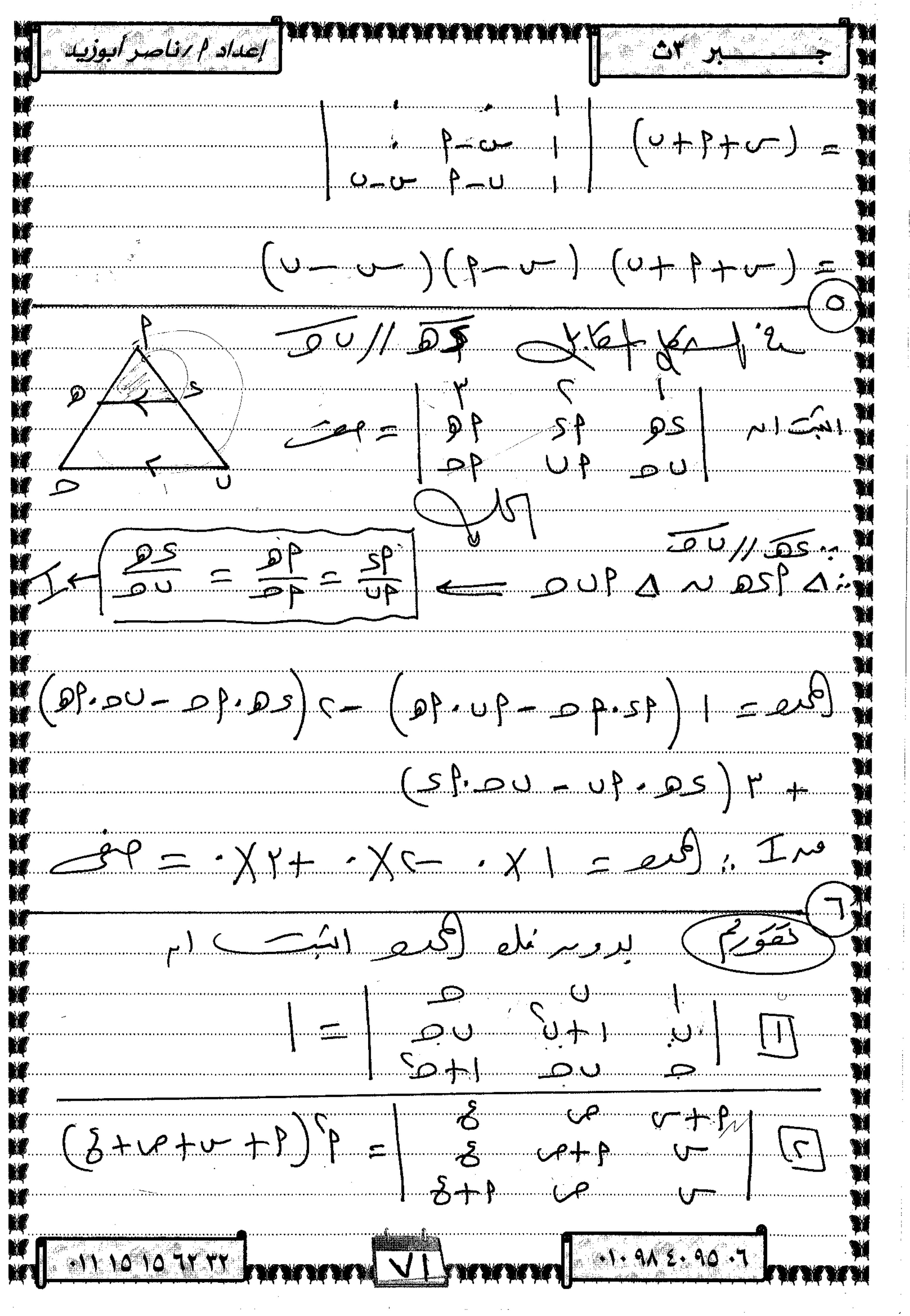
$$\begin{vmatrix} س & أ & ب \\ أ & س & ب \\ أ & ب & س \end{vmatrix} = (س + أ + ب)(س - أ)(س - ب)$$

الحل

$ع_1 + ع_2 + ع_3$ ←

$$\begin{vmatrix} س + أ + ب & أ & ب \\ س + أ + ب & س & ب \\ س + أ + ب & ب & س \end{vmatrix}$$ عامل مشترك من $ع_1$

$$= (س + أ + ب) \begin{vmatrix} 1 & أ & ب \\ 1 & س & ب \\ 1 & ب & س \end{vmatrix}$$ $-أ ع_1 + ع_2$ ، $-ب ع_1 + ع_3$ ←



= (س + أ + ب) | ١ ١ ١ ؛ ١ س − أ ... ؛ ١ ب − أ ب − س |

= (س + أ + ب) (س − أ) (س − ب)

⑤ في الشكل المقابل: ده // ب جـ

اثبت أن:

| ١ ٢ ٣ |
| ده أد أه |
| ب جـ أب أجـ |

= صفر

∵ ده // ب جـ

∴ Δ أده ~ Δ أب جـ ⟵ (أد / أب = أه / أجـ = ده / ب جـ) ⟵ (١)

المحدد = ١ (أد . أجـ − أب . أه) − ٢ (ده . أجـ − ب جـ . أه)

+ ٣ (ده . أب − ب جـ . أد)

من (١) ∴ المحدد = ١ × ٠ − ٢ × ٠ + ٣ × ٠ = صفر

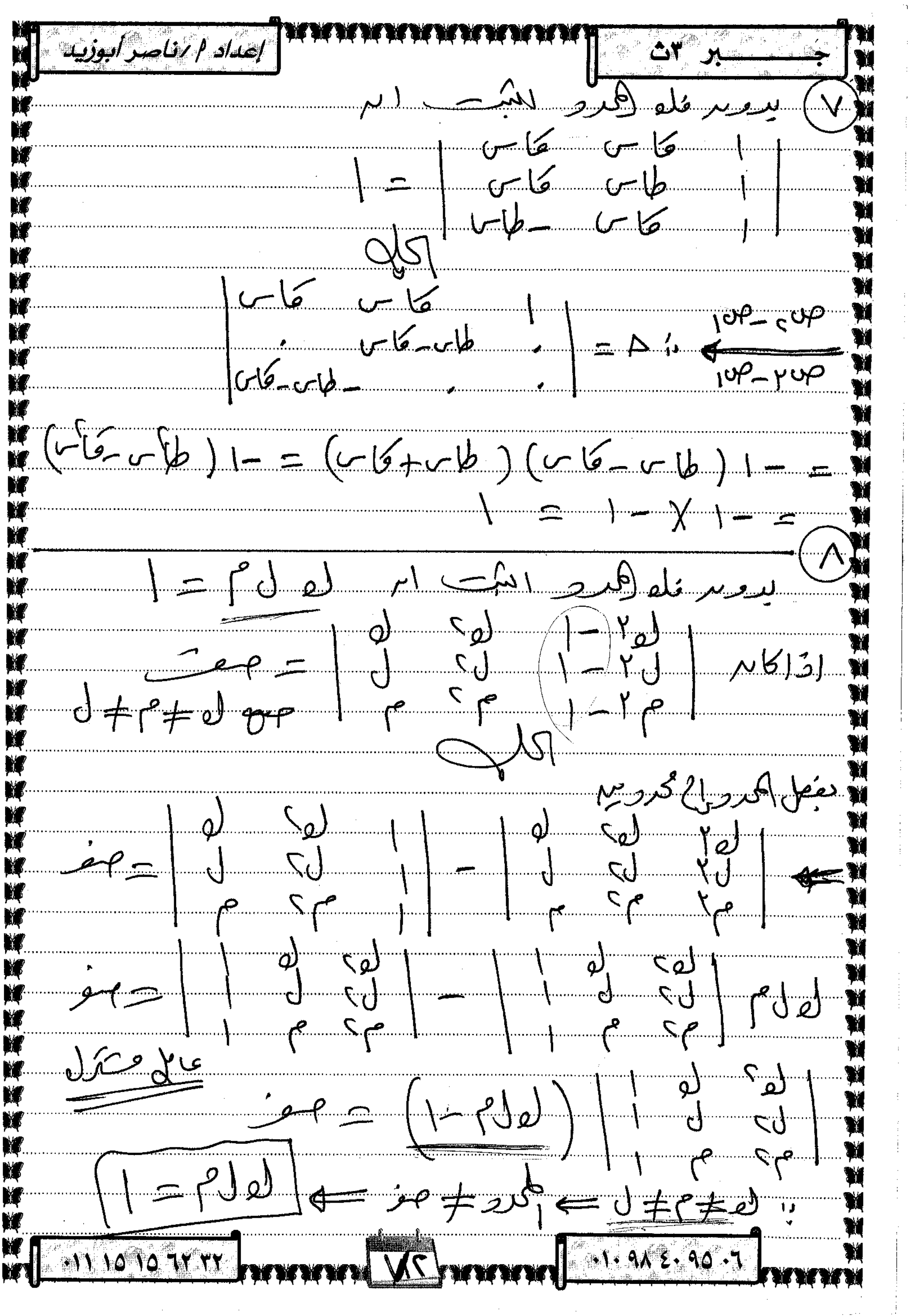
⑥ تمارين: بدون فك المحدد اثبت أن

(١)
| ١ ب جـ |
| ب ١ + ب² ب جـ |
| جـ ب جـ ١ + جـ² |

= ١

(٢)
| أ + س ص ع |
| س أ + ص ع |
| س ص أ + ع |

= أ² (أ + س + ص + ع)



٧) بدون فك المحدد اثبت ان

$$\begin{vmatrix} 1 & قاس & قاس \\ 1 & طاس & قاس \\ 1 & قاس & -طاس \end{vmatrix} = 1$$

الحل

ص٢ - ص١ ، ص٣ - ص١

$$\therefore \Delta = \begin{vmatrix} 1 & قاس & قاس \\ 0 & طاس - قاس & 0 \\ 0 & 0 & -طاس - قاس \end{vmatrix}$$

$= -1\,(طاس - قاس)(طاس + قاس) = -1\,(طا^2س - قا^2س)$

$= -1 \times -1 = 1$

---

٨) بدون فك المحدد اثبت ان $ك\,ل\,م = 1$

اذا كان

$$\begin{vmatrix} ك^3 - 1 & ك^2 & ك \\ ل^3 - 1 & ل^2 & ل \\ م^3 - 1 & م^2 & م \end{vmatrix} = صفر \quad ، \quad ك \neq م \neq ل$$

الحل

بفصل المحدد إلى محددين

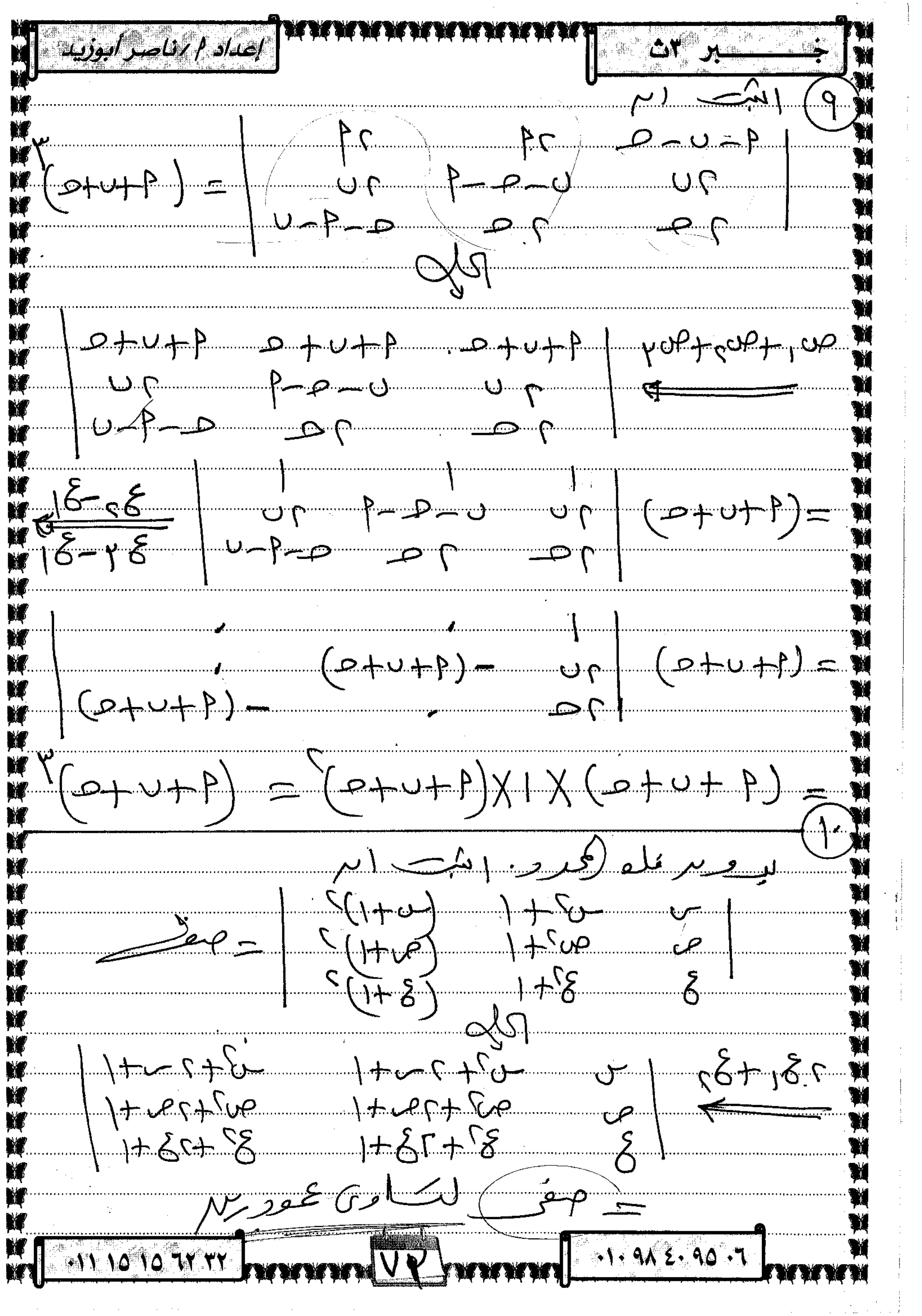
$$\begin{vmatrix} ك^3 & ك^2 & ك \\ ل^3 & ل^2 & ل \\ م^3 & م^2 & م \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & ك^2 & ك \\ 1 & ل^2 & ل \\ 1 & م^2 & م \end{vmatrix} = صفر$$

$$ك\,ل\,م \begin{vmatrix} ك^2 & ك & 1 \\ ل^2 & ل & 1 \\ م^2 & م & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & ك & ك^2 \\ 1 & ل & ل^2 \\ 1 & م & م^2 \end{vmatrix} = صفر$$

عامل مشترك

$$\begin{vmatrix} ك^2 & ك & 1 \\ ل^2 & ل & 1 \\ م^2 & م & 1 \end{vmatrix} (ك\,ل\,م - 1) = صفر$$

$\because ك \neq م \neq ل \Leftarrow$ المحدد $\neq$ صفر $\Leftarrow$ $\boxed{ك\,ل\,م = 1}$


جبر ٣ث
إعداد أ/ ناصر أبوزيد
٠١١١٥١٥٦٢٣٢
٧٩
٠١٠٩٨٤٠٩٥٠٦



إعداد م/ناصر أبوزيد

(١١) باستخدام خواص المحددات

$$\begin{vmatrix} أ+دس & دس-أ & 1 \\ ب+هـس & هـس-ب & 1 \\ جـ+وس & وس-جـ & 1 \end{vmatrix} = 2س \begin{vmatrix} أ & ب & جـ \\ د & هـ & و \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

الحل

$ع_1 - ع_2 \Longleftarrow$

$$\begin{vmatrix} 2أ & دس-أ & 1 \\ 2ب & هـس-ب & 1 \\ 2جـ & وس-جـ & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} أ & دس-أ & 1 \\ ب & هـس-ب & 1 \\ جـ & وس-جـ & 1 \end{vmatrix}$$

$ع_1 + ع_2 \Longleftarrow$

$$2\begin{vmatrix} أ & دس & 1 \\ ب & هـس & 1 \\ جـ & وس & 1 \end{vmatrix} = 2س\begin{vmatrix} أ & د & 1 \\ ب & هـ & 1 \\ جـ & و & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2س\begin{vmatrix} أ & ب & جـ \\ د & هـ & و \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

وذلك بإيجاد مدور مصفوفة المحدد

(١٢) بدون فك المحدد اثبت أن

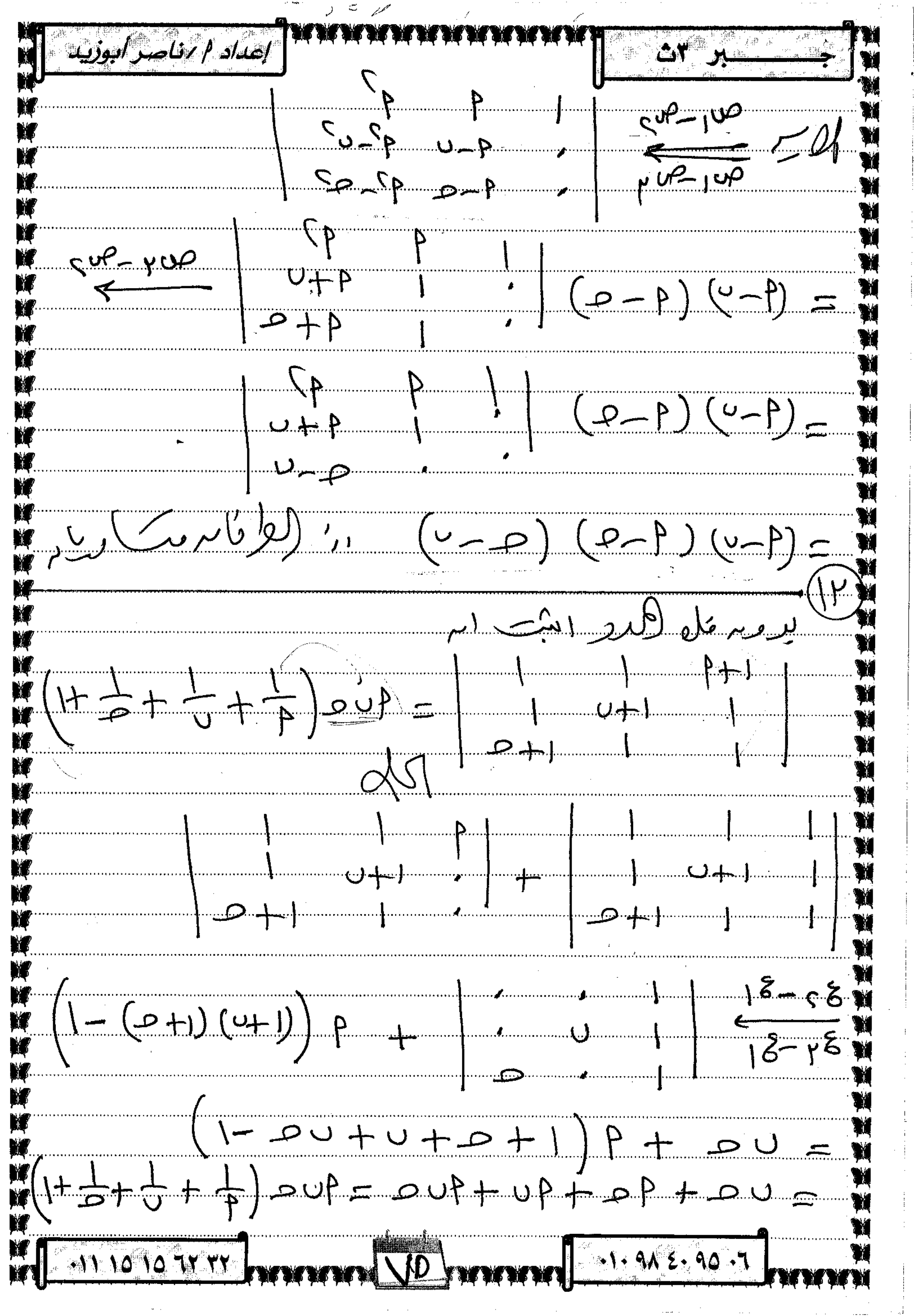
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ أ & ب & جـ \\ ب جـ & جـ أ & أ ب \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & أ & أ^2 \\ 1 & ب & ب^2 \\ 1 & جـ & جـ^2 \end{vmatrix}$$

الحل

الأيمن $\xrightarrow[ع_3 - ع_1]{ع_2 - ع_1}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ أ & ب-أ & جـ-أ \\ ب جـ & جـ(أ-ب) & ب(أ-جـ) \end{vmatrix}$$

$$= (ب-أ)(جـ-أ)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ أ & 1 & 1 \\ ب جـ & -جـ & -ب \end{vmatrix} = (ب-أ)(جـ-أ)(جـ-ب)$$



$$\begin{vmatrix} 1 & أ & أ^2 \\ 0 & أ-ب & أ^2-ب^2 \\ 0 & أ-جـ & أ^2-جـ^2 \end{vmatrix} \xleftarrow[ص_1 - ص_3]{ص_1 - ص_2}$$ بالسير

$$= (أ-ب)(أ-جـ)\begin{vmatrix} 1 & أ & أ^2 \\ 0 & 1 & أ+ب \\ 0 & 1 & أ+جـ \end{vmatrix} \xleftarrow{ص_2 - ص_3}$$

$$= (أ-ب)(أ-جـ)\begin{vmatrix} 1 & أ & أ^2 \\ 0 & 1 & أ+ب \\ 0 & 0 & ب-جـ \end{vmatrix}$$

$$= (أ-ب)(أ-جـ)(ب-جـ)$$,, المطلوب إثباته

(١٢) بدون فك المحدد أثبت أن

$$\begin{vmatrix} أ+1 & 1 & 1 \\ 1 & ب+1 & 1 \\ 1 & 1 & جـ+1 \end{vmatrix} = أ ب جـ \left(\frac{1}{أ} + \frac{1}{ب} + \frac{1}{جـ} + 1\right)$$

الحل

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & ب+1 & 1 \\ 1 & 1 & جـ+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} أ & 1 & 1 \\ 0 & ب+1 & 1 \\ 0 & 1 & جـ+1 \end{vmatrix}$$

$$\xleftarrow[ع_3 - ع_1]{ع_2 - ع_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & ب & 0 \\ 1 & 0 & جـ \end{vmatrix} + أ\left((ب+1)(جـ+1) - 1\right)$$

$$= ب جـ + أ\left(1 + جـ + ب + ب جـ - 1\right)$$

$$= ب جـ + أ جـ + أ ب + أ ب جـ = أ ب جـ\left(\frac{1}{أ} + \frac{1}{ب} + \frac{1}{جـ} + 1\right)$$



النظام الاحداثى المتعامد ثلاثى الابعاد

* لتعيين النقطة (س، ص، ع) فى الفراغ
نعين اولاً النقطة (س، ص) ثم
نتحرك لاعلى او لاسفل موازياً ع
حسب مقدار واشارة الاحداثى الثالث

تعميم

لتعيين احداثى نقطة معينة نوجد مسقطها على كل محور فى الفراغ

مثال

عين موضع النقطة أ (٣، ٢، ٤) فى الفراغ

الحل

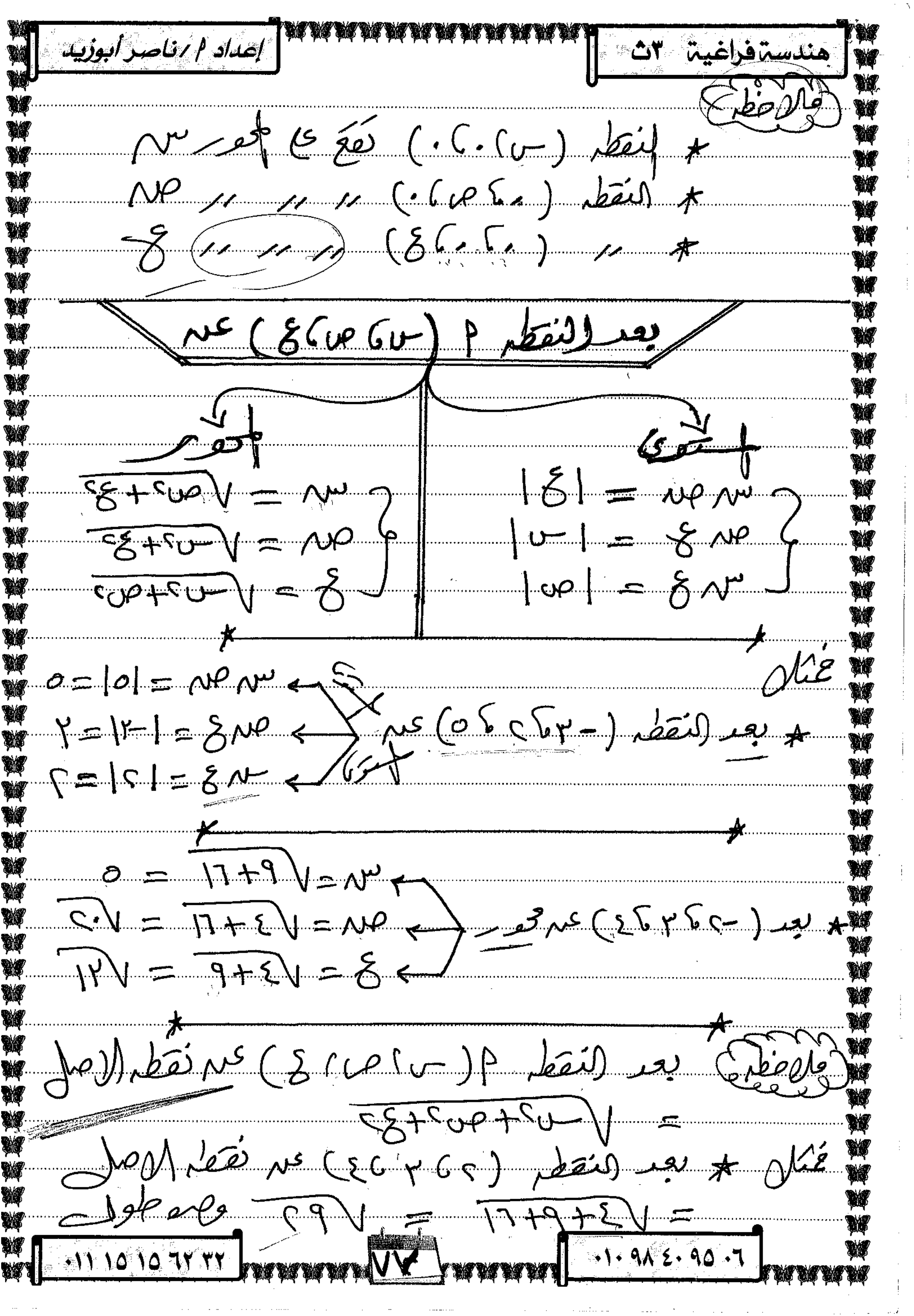
نعين النقطة (٣، ٢) فى مستوى
س ص ثم نتحرك ٤ وحدات
فى الاتجاه الموجب لمحور ع

---

* النقطة (س، ص، ٠) تقع فى
مستوى الاحداثى س ص وتكون معادلته ع = صفر

* النقطة (س، ٠، ع) تقع فى
مستوى الاحداثى س ع وتكون معادلته ص = صفر

* النقطة (٠، ص، ع) تقع فى
مستوى الاحداثى ص ع وتكون معادلته س = صفر



إعداد أ / ناصر أبوزيد

ملاحظة

* النقطة (س، ٠، ٠) تقع في محور س
* النقطة (٠، ص، ٠) " " " محور ص
* " (٠، ٠، ع) " " " ع

بعد النقطة أ (س، ص، ع) عن

المستوى:
- س ص = |ع|
- ص ع = |س|
- س ع = |ص|

المحور:
- س = $\sqrt{ص^2 + ع^2}$
- ص = $\sqrt{س^2 + ع^2}$
- ع = $\sqrt{س^2 + ص^2}$

مثال

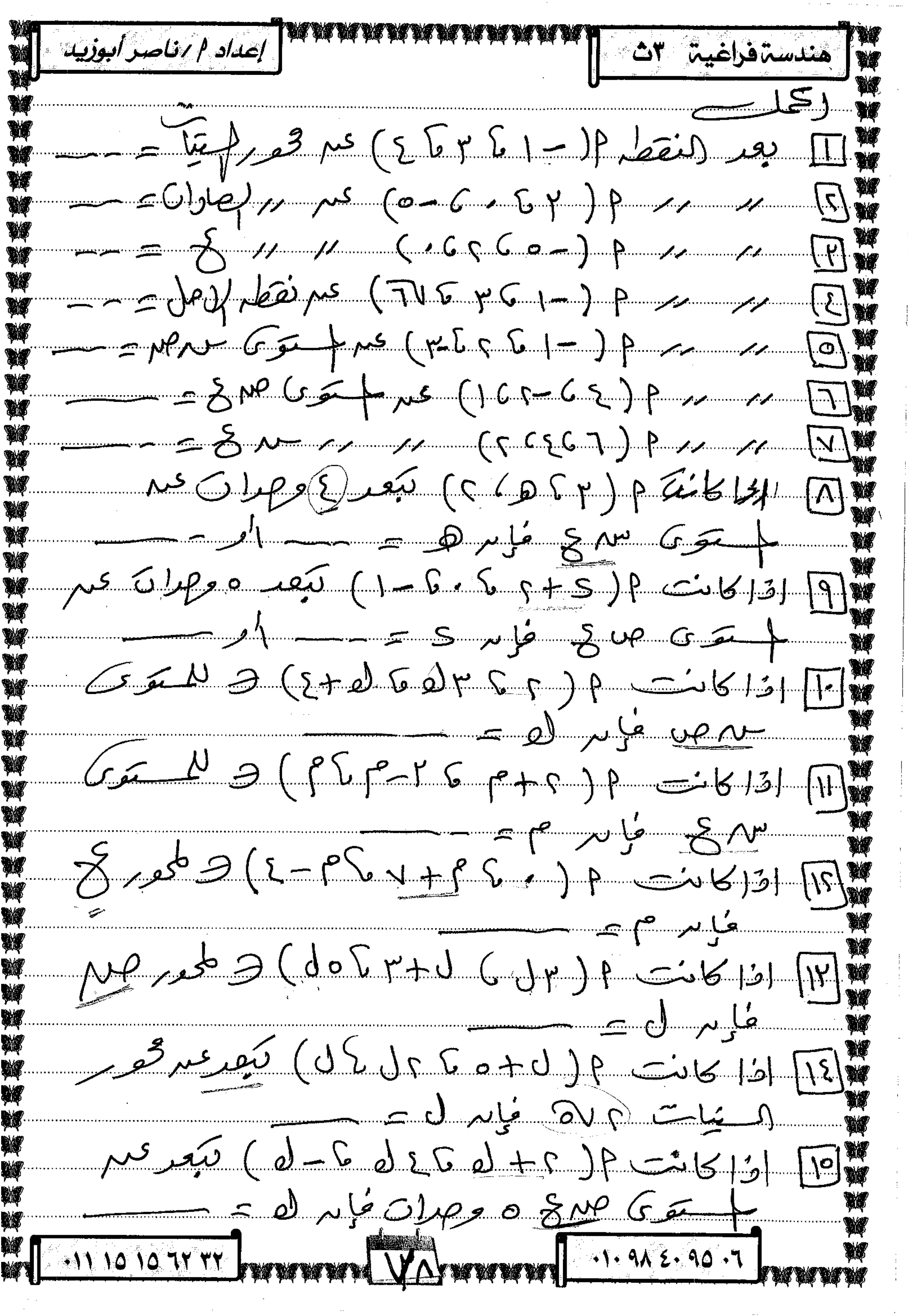
* بعد النقطة (-٢، ٣، ٥) عن المستوى
  - س ص = |٥| = ٥
  - ص ع = |-٢| = ٢
  - س ع = |٣| = ٣

* بعد (-٢، ٣، ٤) عن محور
  - س = $\sqrt{9+16}$ = ٥
  - ص = $\sqrt{4+16}$ = $\sqrt{20}$
  - ع = $\sqrt{4+9}$ = $\sqrt{13}$

ملاحظة: بعد النقطة أ (س، ص، ع) عن نقطة الأصل
= $\sqrt{س^2 + ص^2 + ع^2}$

مثال * بعد النقطة (٢، ٣، ٤) عن نقطة الأصل
= $\sqrt{4+9+16}$ = $\sqrt{29}$ وحدة طول

٠١١١٥١٥٦٢٣٢ — ٠١٠٩٨٤٠٩٥٠٦



إعداد م / ناصر أبوزيد

أكمل

١) بعد النقطة أ(-١ ، ٣ ، ٤) عن محور السينات = ------

٢) " " أ(٢ ، ٠ ، -٥) عن " الصادات = ------

٣) " " أ(-٥ ، ٢ ، ٠) " " ع = ------

٤) " " أ(-١ ، ٣ ، ٦٧) عن نقطة الأصل = ------

٥) " " أ(-١ ، ٢ ، -٣) عن المستوى س ص = ------

٦) " " أ(٤ ، -٢ ، ١) عن المستوى ص ع = ------

٧) " " أ(٦ ، ٤ ، ٢) " " س ع = ------

٨) اذا كانت أ(٣ ، هـ ، ٢) تبعد ٤ وحدات عن المستوى س ع فإن هـ = ------ أو ------

٩) اذا كانت أ(ك + ٢ ، ٠ ، -١) تبعد ٥ وحدات عن المستوى ص ع فإن ك = ------ أو ------

١٠) اذا كانت أ(٢ ، ٣ك ، ك + ٤) ∈ للمستوى س ص فإن ك = ------

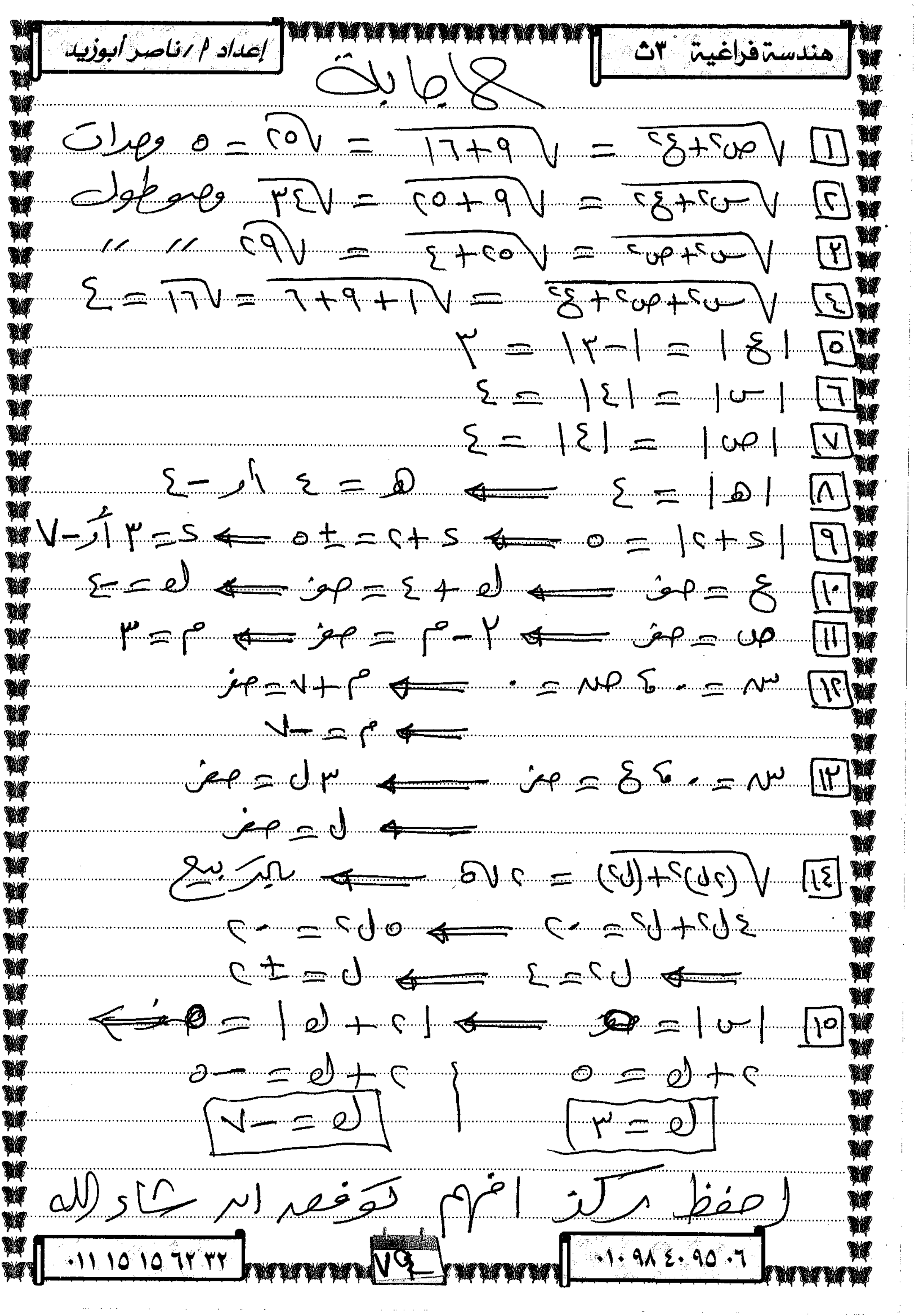
١١) اذا كانت أ(٢ + م ، ٢ - م ، م) ∈ للمستوى س ع فإن م = ------

١٢) اذا كانت أ(٠ ، م + ٧ ، م - ٤) ∈ لمحور ع فإن م = ------

١٣) اذا كانت أ(٣ل ، ل + ٣ ، ٥ل) ∈ لمحور ص فإن ل = ------

١٤) اذا كانت أ(ل + ٥ ، ٢ل ، ٤ل) تبعد عن محور السينات ٢√٥ فإن ل = ------

١٥) اذا كانت أ(٢ + ك ، ٤ك ، -ك) تبعد عن المستوى ص ع ٥ وحدات فإن ك = ------



الإجابة

١) $\sqrt{ص^2+ع^2} = \sqrt{٩+١٦} = \sqrt{٢٥} = ٥$ وحدات

٢) $\sqrt{س^2+ع^2} = \sqrt{٩+٢٥} = \sqrt{٣٤}$ وحدة طول

٣) $\sqrt{س^2+ص^2} = \sqrt{٢٥+٤} = \sqrt{٢٩}$ " "

٤) $\sqrt{س^2+ص^2+ع^2} = \sqrt{١+٩+٦} = \sqrt{١٦} = ٤$

٥) $|ع| = |-٣| = ٣$

٦) $|س| = |٤| = ٤$

٧) $|ص| = |٤| = ٤$

٨) $|هـ| = ٤ \Leftarrow هـ = ٤$ أو -٤

٩) $|د+٢| = ٥ \Leftarrow د+٢ = \pm ٥ \Leftarrow د = ٣$ أو -٧

١٠) ع = صفر $\Leftarrow$ ل + ٤ = صفر $\Leftarrow$ ل = -٤

١١) ص = صفر $\Leftarrow$ ٢ − م = صفر $\Leftarrow$ م = ٣

١٢) س = ٠ ، ع = ٠ $\Leftarrow$ م + ٧ = صفر

$\Leftarrow$ م = -٧

١٣) س = ٠ ، ع = صفر $\Leftarrow$ ٣ل = صفر

$\Leftarrow$ ل = صفر

١٤) $\sqrt{(٢ل)^2+(ل)^2} = ٢\sqrt{٥}$ $\Leftarrow$ بالتربيع

$٤ل^2 + ل^2 = ٢٠ \Leftarrow ٥ل^2 = ٢٠$

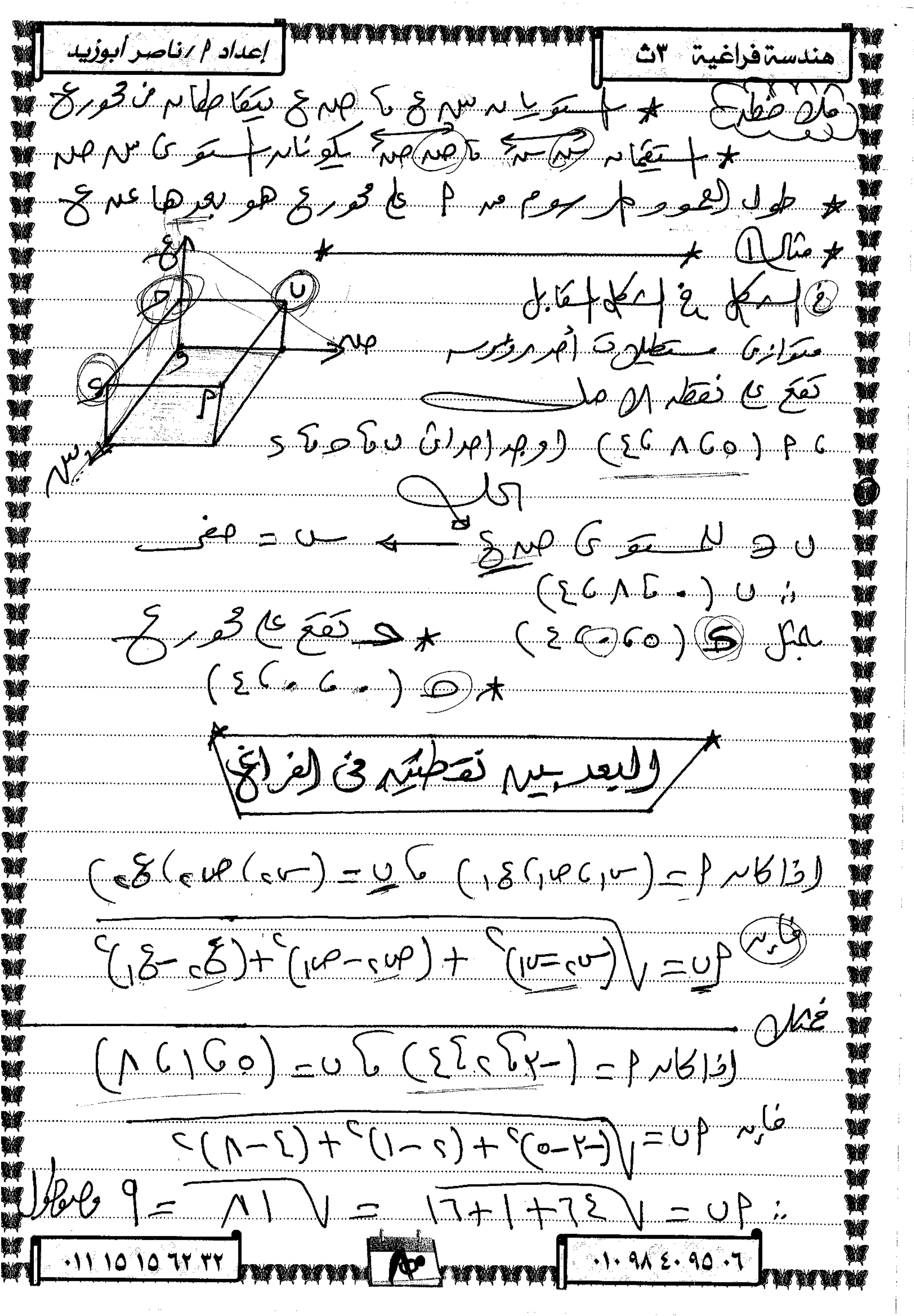
$\Leftarrow ل^2 = ٤ \Leftarrow ل = \pm ٢$

١٥) $|س| = ٥ \Leftarrow |٢ + هـ| = ٥$

$٢ + هـ = ٥$ ، $٢ + هـ = -٥$

$هـ = ٣$ ، $هـ = -٧$

احفظ ركز افهم تتفوق إن شاء الله



إعداد أ/ ناصر أبوزيد

ملاحظة

* المستويان س ع ، ص ع يتقاطعان في محور ع
* المستقيمان سَ س ، صَ ص يكونان المستوي س ص
* طول العمود المرسوم من أ على محور ع هو بعدها عن ع

* مثال ①

في الشكل المقابل متوازي مستطيلات أحد رؤوسه تقع على نقطة الأصل ، أ (٥ ، ٨ ، ٤) أوجد إحداثي ب ، جـ ، د

الحل

ب ∈ المستوي ص ع ← س = صفر

∴ ب (٠ ، ٨ ، ٤)

بالمثل د (٥ ، ٠ ، ٤) * جـ تقع على محور ع

* جـ (٠ ، ٠ ، ٤)

البعد بين نقطتين في الفراغ

إذا كان أ = (س١ ، ص١ ، ع١) ، ب = (س٢ ، ص٢ ، ع٢)

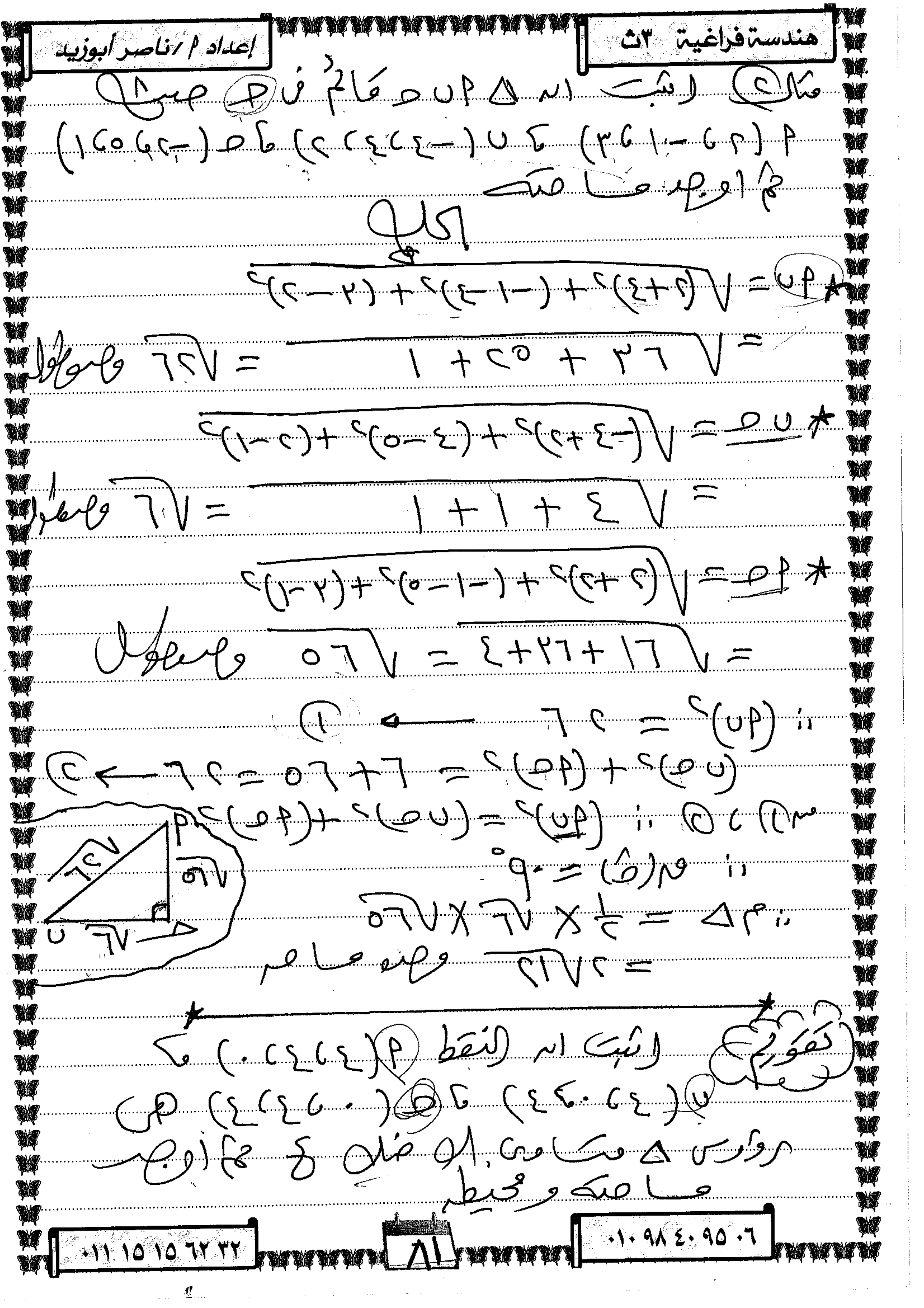
فإن أب = √((س٢ − س١)² + (ص٢ − ص١)² + (ع٢ − ع١)²)

مثال

إذا كان أ = (−٢ ، ٢ ، ٤) ، ب = (٥ ، ١ ، ٨)

فإن أب = √((−٢ − ٥)² + (٢ − ١)² + (٤ − ٨)²)

∴ أب = √(٦٤ + ١ + ١٦) = √٨١ = ٩ وحدة طول



مثال (٢) اثبت أن △ أ ب جـ قائم في (جـ) حيث
أ (٢ ، -١ ، ٣) ، ب (-٤ ، ٤ ، ٢) ، جـ (-٢ ، ٥ ، ١)
ثم أوجد مساحته

الحل

* أ ب = √((٢+٤)² + (-١-٤)² + (٣-٢)²)
= √(٣٦ + ٢٥ + ١) = √٦٢ وحدة طول

* ب جـ = √((-٤+٢)² + (٤-٥)² + (٢-١)²)
= √(٤ + ١ + ١) = √٦ وحدة طول

* أ جـ = √((٢+٢)² + (-١-٥)² + (٣-١)²)
= √(١٦ + ٣٦ + ٤) = √٥٦ وحدة طول

∵ (أ ب)² = ٦٢ ← (١)

(ب جـ)² + (أ جـ)² = ٦ + ٥٦ = ٦٢ ← (٢)

من (١) ، (٢) ∵ (أ ب)² = (ب جـ)² + (أ جـ)²

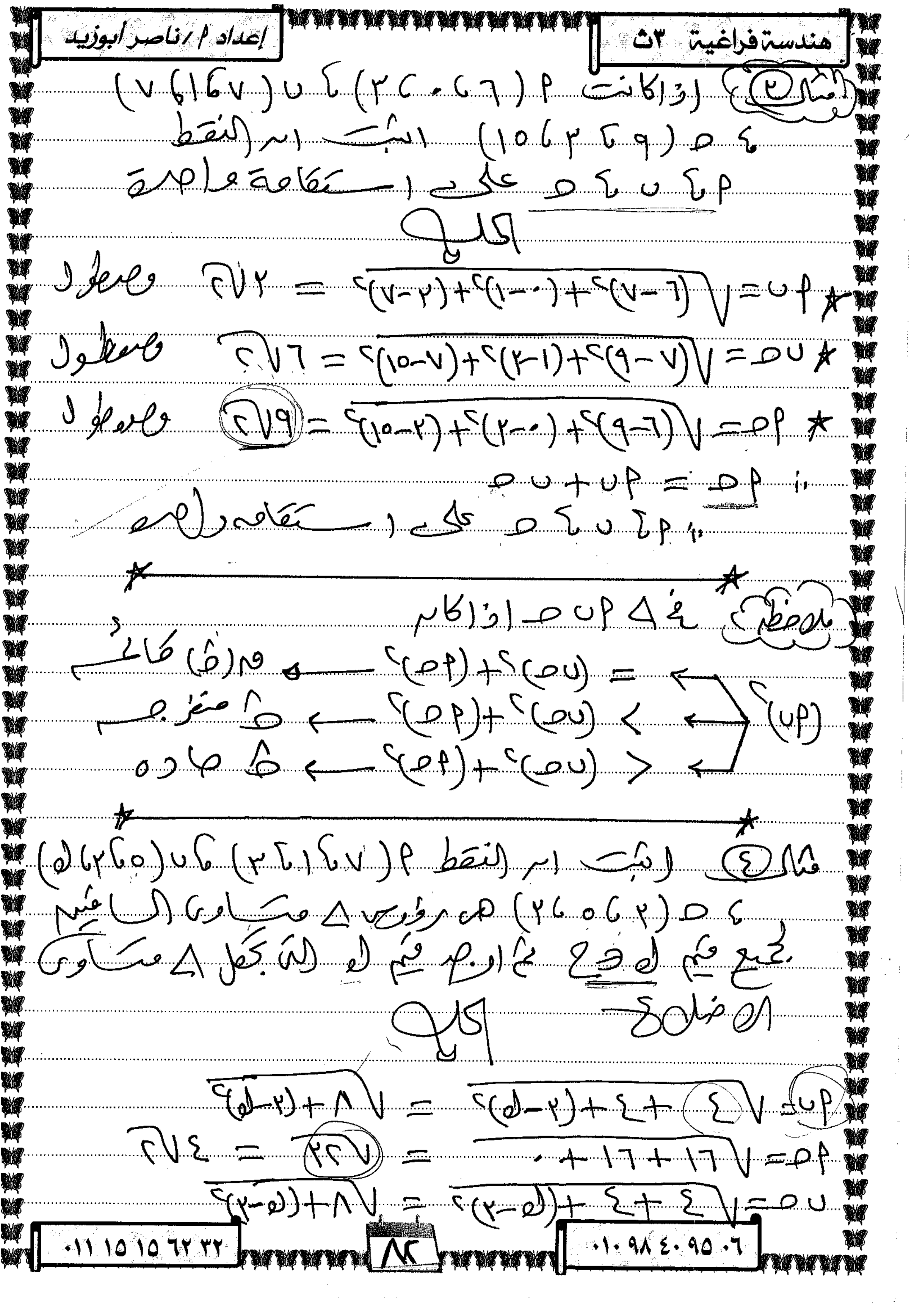
∴ ق(∠جـ) = ٩٠°

∴ م△ = ½ × √٦ × √٥٦

= ٢√٢١ وحدة مساحة

تقويم

اثبت أن النقط أ (٤ ، ٤ ، ٠) ، ب (٤ ، ٠ ، ٤) ، جـ (٠ ، ٤ ، ٤) هي رؤوس △ متساوي الأضلاع ثم أوجد مساحته ومحيطه



مثال ③ إذا كانت أ (٦ ، ٠ ، ٣) ، ب (٧ ، ١ ، ٧) ، ج (٩ ، ٣ ، ١٥) اثبت أن النقط أ ، ب ، ج على استقامة واحدة

الحل

★ أب = $\sqrt{(٦-٧)^2 + (٠-١)^2 + (٣-٧)^2}$ = ٣ $\sqrt{٢}$ وحدة طول

★ ب ج = $\sqrt{(٧-٩)^2 + (١-٣)^2 + (٧-١٥)^2}$ = ٦ $\sqrt{٢}$ وحدة طول

★ أ ج = $\sqrt{(٦-٩)^2 + (٠-٣)^2 + (٣-١٥)^2}$ = ٩ $\sqrt{٢}$ وحدة طول

∴ أ ج = أ ب + ب ج

∴ أ ، ب ، ج على استقامة واحدة

ملاحظة في △ أ ب ج إذا كان

(أب)^2 = (ب ج)^2 + (أ ج)^2 ← ق (∠ ج) قائمة

(أب)^2 < (ب ج)^2 + (أ ج)^2 ← ∠ ج حادة

(أب)^2 > (ب ج)^2 + (أ ج)^2 ← ∠ ج منفرجة

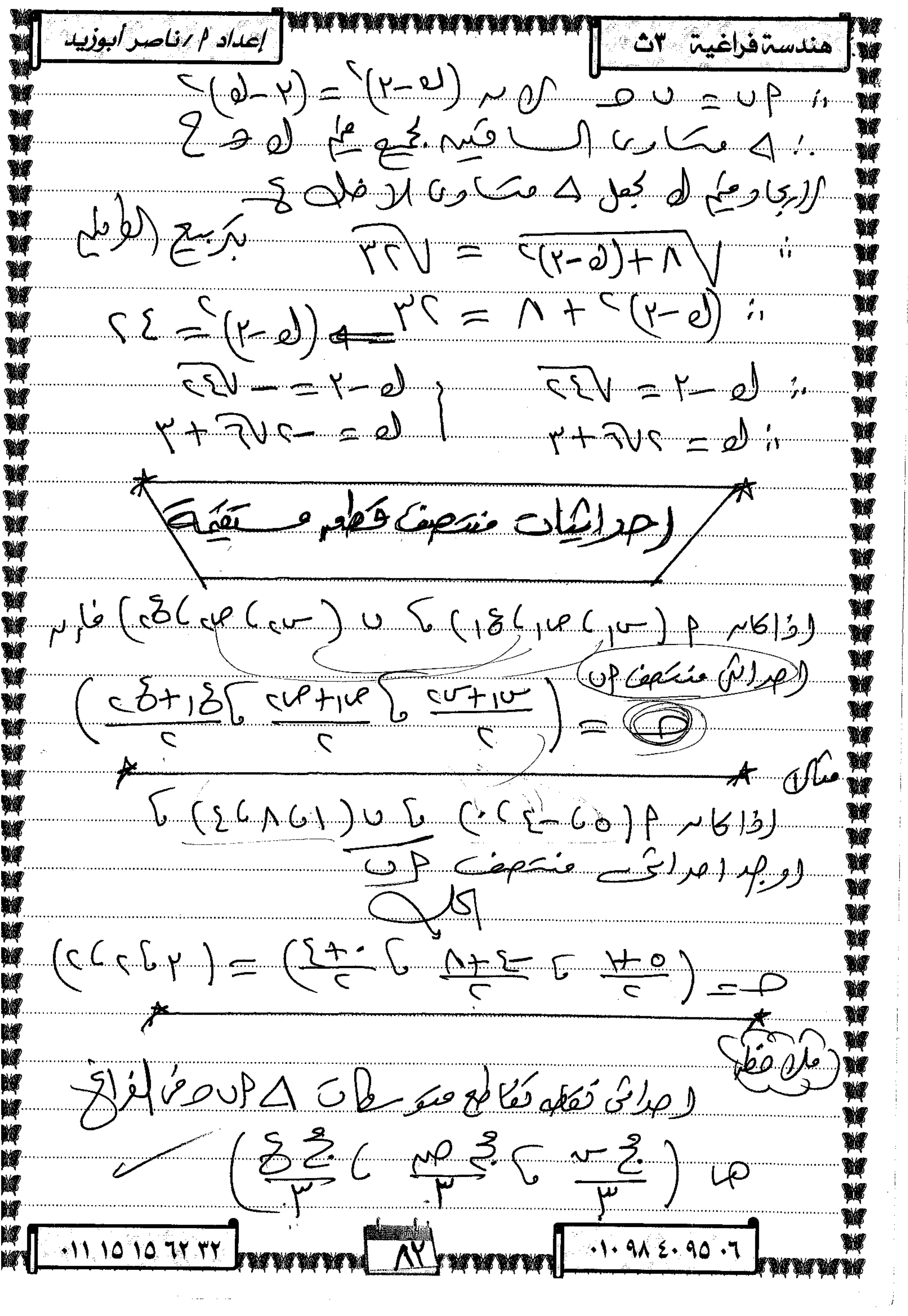
مثال ④ اثبت أن النقط أ (٧ ، ١ ، ٣) ، ب (٥ ، ٢ ، ل) ، ج (٢ ، ٥ ، ٢) هي رؤوس △ متساوي الساقين لجميع قيم ل ∈ ح ثم أوجد قيم ل التي تجعل △ متساوي الأضلاع

الحل

أب = $\sqrt{٤ + ٤ + (ل-٢)^2}$ = $\sqrt{٨ + (ل-٢)^2}$

أ ج = $\sqrt{١٦ + ١٦ + ٠}$ = $\sqrt{٣٢}$ = ٤ $\sqrt{٢}$

ب ج = $\sqrt{٤ + ٤ + (ل-٢)^2}$ = $\sqrt{٨ + (ل-٢)^2}$



∵ $م ب = ب جـ$ ∴ $(ل-٢)^٢ = (٢-ل)^٢$

∴ Δ متساوي الساقين لجميع قيم ل ∈ ح

لإيجاد قيم ل تجعل Δ متساوي الأضلاع

∴ $\sqrt{٨ + (ل-٢)^٢} = \sqrt{٣٢}$ بتربيع الطرفين

∴ $(ل-٢)^٢ + ٨ = ٣٢ \Leftarrow (ل-٢)^٢ = ٢٤$

∴ $ل - ٢ = \sqrt{٢٤}$ ، $ل - ٢ = -\sqrt{٢٤}$

∴ $ل = ٢\sqrt{٦} + ٣$ ، $ل = -٢\sqrt{٦} + ٣$

إحداثيات منتصف قطعة مستقيمة

إذا كانت م (س١، ص١، ع١) ، ب (س٢، ص٢، ع٢) فإن

إحداثي منتصف م ب

$جـ = \left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢} ، \frac{ع_١ + ع_٢}{٢}\right)$

مثال ١

إذا كانت م (٥، -٤، ٠) ، ب (١، ٨، ٤) ،
أوجد إحداثي منتصف م ب

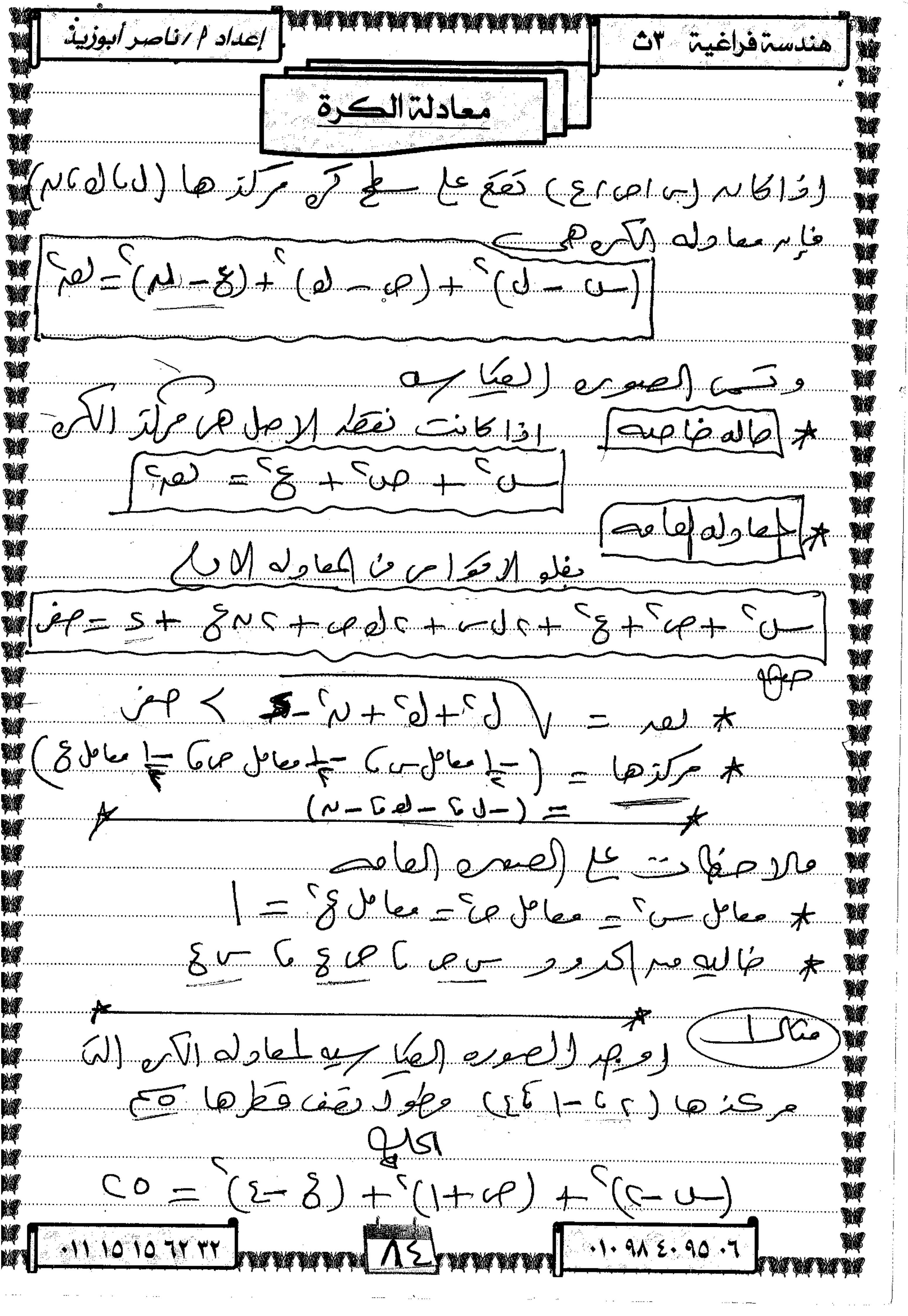
الحل

$جـ = \left(\frac{٥+١}{٢} ، \frac{-٤+٨}{٢} ، \frac{٠+٤}{٢}\right) = (٣، ٢، ٢)$

ملاحظة

إحداثي نقطة تقاطع متوسطات Δ م ب جـ في الفراغ

هي $\left(\frac{مجـ س}{٣} ، \frac{مجـ ص}{٣} ، \frac{مجـ ع}{٣}\right)$



إعداد أ/ ناصر ابوزيد

معادلة الكرة

إذا كانت (س، ص، ع) تقع على سطح كرة مركزها (ل، ك، ن)

فإن معادلة الكرة هي

$$(س - ل)^2 + (ص - ك)^2 + (ع - ن)^2 = نق^2$$

وتسمى الصورة القياسية

* حالة خاصة: إذا كانت نقطة الأصل هي مركز الكرة

$$س^2 + ص^2 + ع^2 = نق^2$$

* المعادلة العامة

بفك الأقواس من المعادلة الأولى

$$س^2 + ص^2 + ع^2 + ٢ل\,س + ٢ك\,ص + ٢ن\,ع + د = صفر$$

* $نق = \sqrt{ل^2 + ك^2 + ن^2 - د} > صفر$
* مركزها = $(-\frac{1}{2}$ معامل س ، $-\frac{1}{2}$ معامل ص ، $-\frac{1}{2}$ معامل ع$)$

$= (-ل ، -ك ، -ن)$

ملاحظات على الصورة العامة

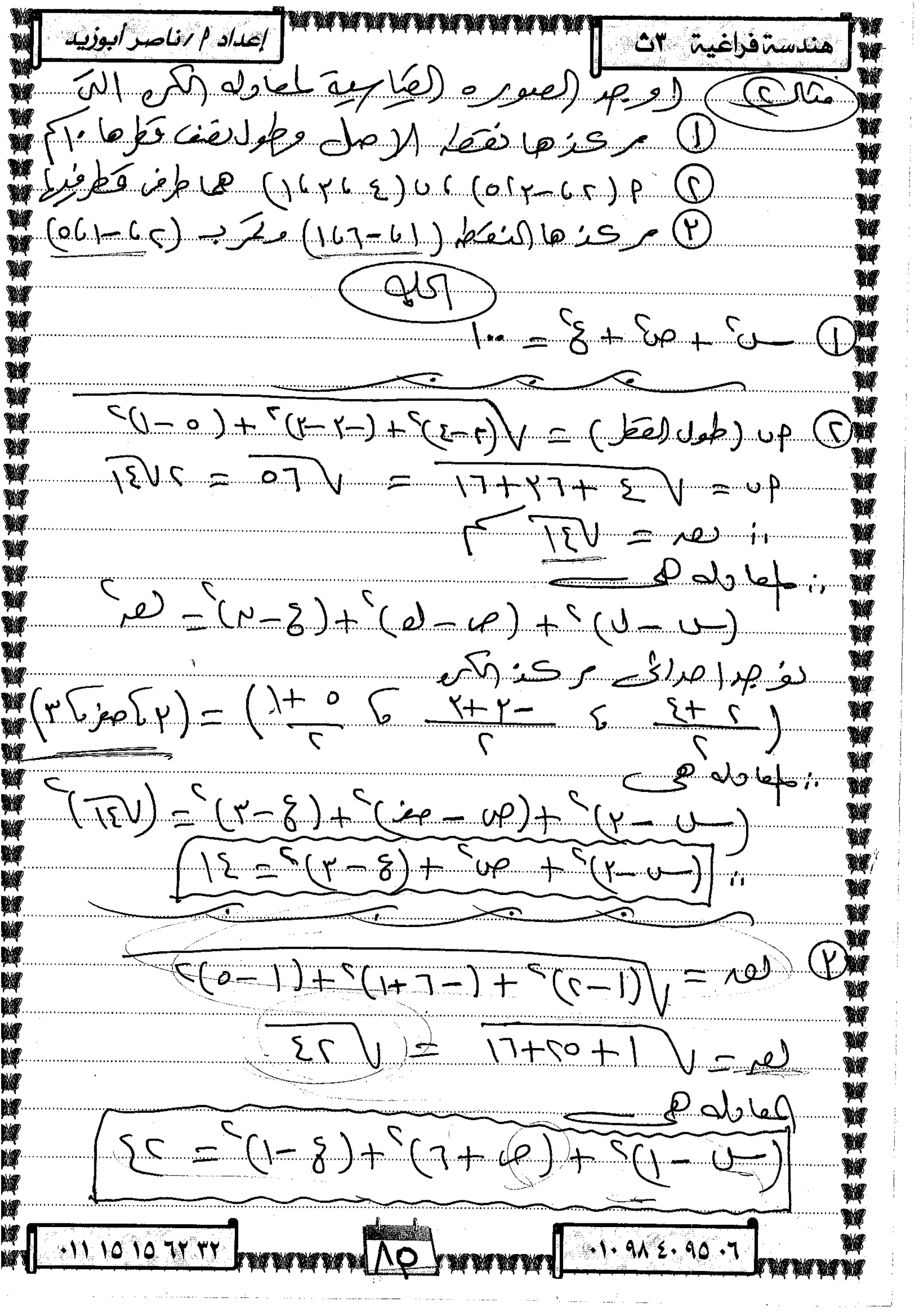
* معامل $س^2$ = معامل $ص^2$ = معامل $ع^2$ = ١
* خالية من الحدود س ص ، ص ع ، س ع

مثال

أوجد الصورة القياسية لمعادلة الكرة التي مركزها (٢، −١، ٤) وطول نصف قطرها ٥سم

الحل

$$(س - ٢)^2 + (ص + ١)^2 + (ع - ٤)^2 = ٢٥$$



مثال ٢: أوجد الصورة القياسية لمعادلة الكرة التي

(١) مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها ١٠ سم

(٢) أ(٢، −٢، ٥)، ب(٤، ٢، ١) هما طرفي قطر فيها

(٣) مركزها النقطة (١، −٦، ١) وتمر ب (٢، −١، ٥)

الحل

(١) $\text{س}^2 + \text{ص}^2 + \text{ع}^2 = ١٠٠$

(٢) أب (طول القطر) $= \sqrt{(٢-٤)^2 + (-٢-٢)^2 + (٥-١)^2}$

أب $= \sqrt{٤ + ٣٦ + ١٦} = \sqrt{٥٦} = ٢\sqrt{١٤}$

∴ نق $= \sqrt{١٤}$ سم

∴ المعادلة هي

$(\text{س} - \text{ل})^2 + (\text{ص} - \text{ك})^2 + (\text{ع} - \text{ن})^2 = \text{نق}^2$

نوجد إحداثي مركز الكرة

$\left(\frac{٢+٤}{٢} ، \frac{-٢+٢}{٢} ، \frac{٥+١}{٢}\right) = (٢، \text{صفر}، ٣)$

∴ المعادلة هي

$(\text{س} - ٢)^2 + (\text{ص} - \text{صفر})^2 + (\text{ع} - ٣)^2 = (\sqrt{١٤})^2$

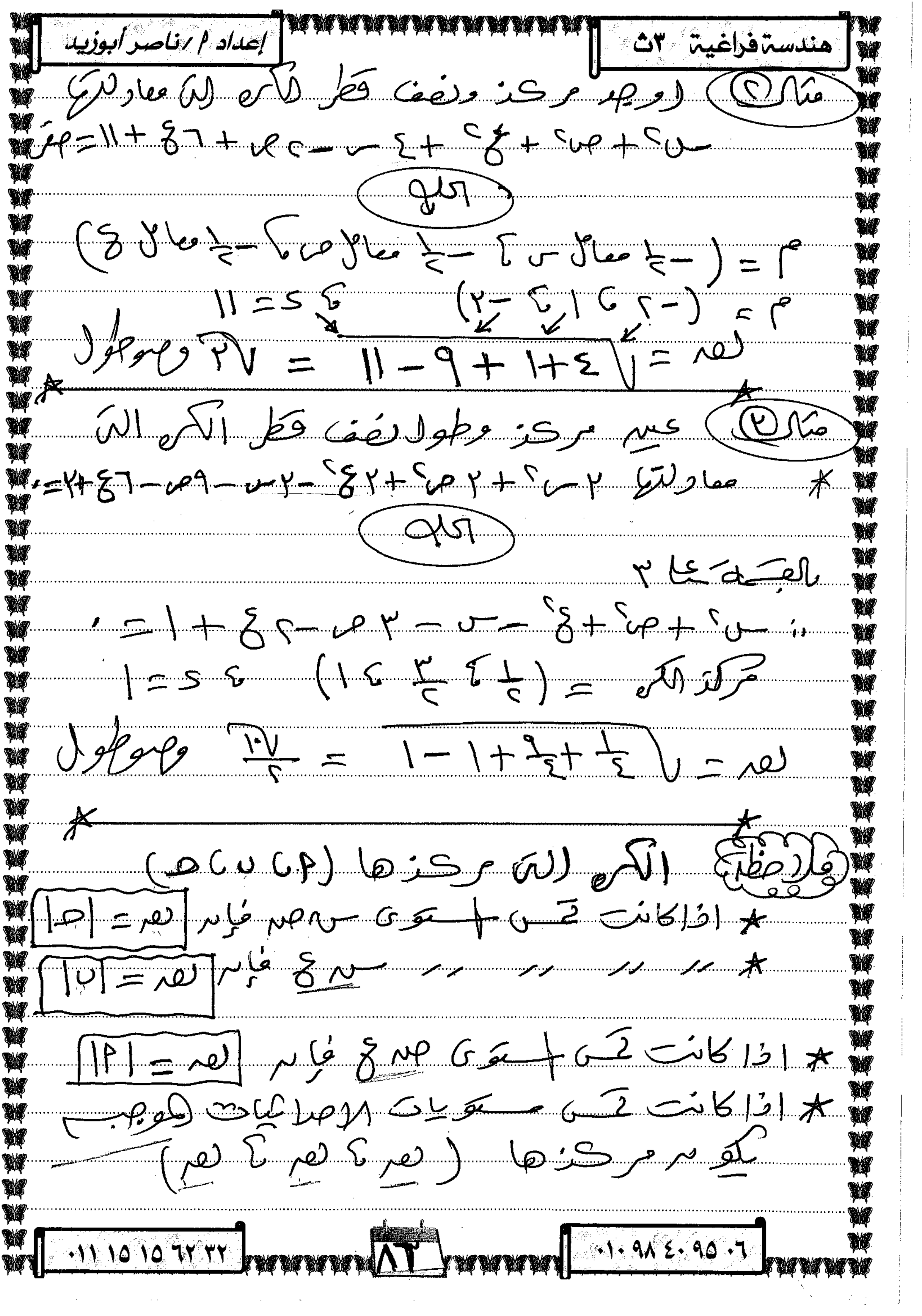
∴ $(\text{س} - ٢)^2 + \text{ص}^2 + (\text{ع} - ٣)^2 = ١٤$

(٣) نق $= \sqrt{(١-٢)^2 + (-٦+١)^2 + (١-٥)^2}$

نق $= \sqrt{١ + ٢٥ + ١٦} = \sqrt{٤٢}$

المعادلة هي

$(\text{س} - ١)^2 + (\text{ص} + ٦)^2 + (\text{ع} - ١)^2 = ٤٢$



مثال (٢) اوجد مركز ونصف قطر الكرة التي معادلتها

س² + ص² + ع² + ٤س − ٢ص + ٦ع + ١١ = صفر

الحل

م = (−½ معامل س ، −½ معامل ص ، −½ معامل ع)

م = (−٢ ، ١ ، −٣) ، د = ١١

نق = √(٤ + ١ + ٩ − ١١) = √٣ وحدة طول

مثال (٣) عين مركز وطول نصف قطر الكرة التي

* معادلتها ٣س² + ٣ص² + ٣ع² − ٣س − ٩ص − ٦ع + ٣ = ٠

الحل

بالقسمة على ٣

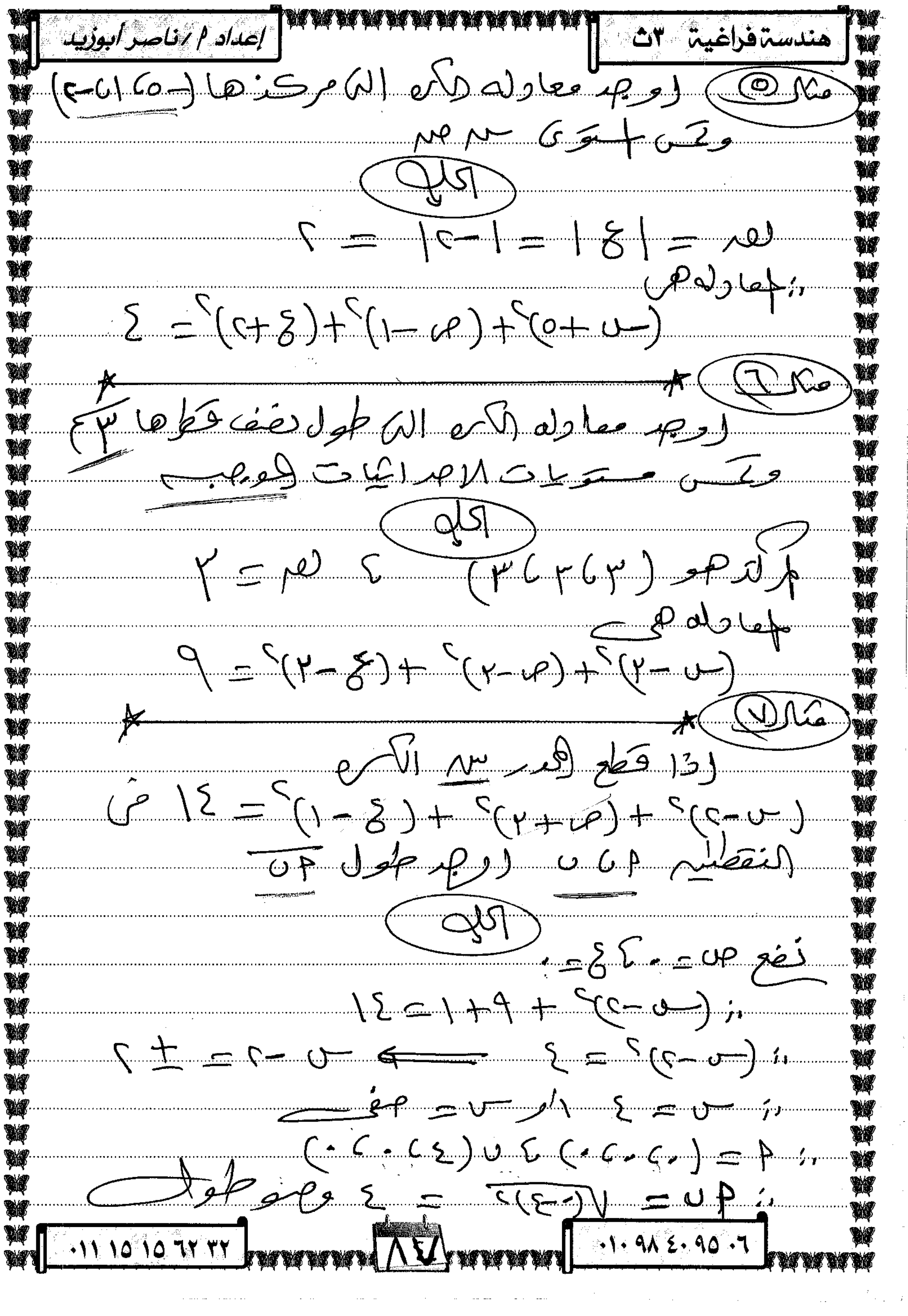
∴ س² + ص² + ع² − س − ٣ص − ٢ع + ١ = ٠

مركز الكرة = (½ ، ³⁄₂ ، ١) ، د = ١

نق = √(¼ + ⁹⁄₄ + ١ − ١) = √١٠ / ٢ وحدة طول

ملاحظة: الكرة التي مركزها (أ ، ب ، جـ)

* اذا كانت تمس مستوى س ص فإن نق = |جـ|
* " " " " " س ع فإن نق = |ب|
* اذا كانت تمس مستوى ص ع فإن نق = |أ|
* اذا كانت تمس مستويات الاحداثيات الموجبة يكون مركزها (نق ، نق ، نق)



مثال ⑤ أوجد معادلة الكرة التي مركزها (-٥، ١، -٢) وتمس المستوى س ص

الحل

نق = |ع| = |-٢| = ٢

∴ المعادلة هي

$(س + ٥)^2 + (ص - ١)^2 + (ع + ٢)^2 = ٤$

مثال ⑥ أوجد معادلة الكرة التي طول نصف قطرها ٣ ع وتمس مستويات الإحداثيات الموجبة

الحل

المركز (٣، ٣، ٣) ، نق = ٣

المعادلة هي

$(س - ٣)^2 + (ص - ٣)^2 + (ع - ٣)^2 = ٩$

مثال ⑦ إذا قطع محور س الكرة

$(س - ٢)^2 + (ص + ٣)^2 + (ع - ١)^2 = ١٤$ في

النقطتين أ ، ب أوجد طول $\overline{أب}$

الحل

نضع ص = ٠ ، ع = ٠

∴ $(س - ٢)^2 + ٩ + ١ = ١٤$

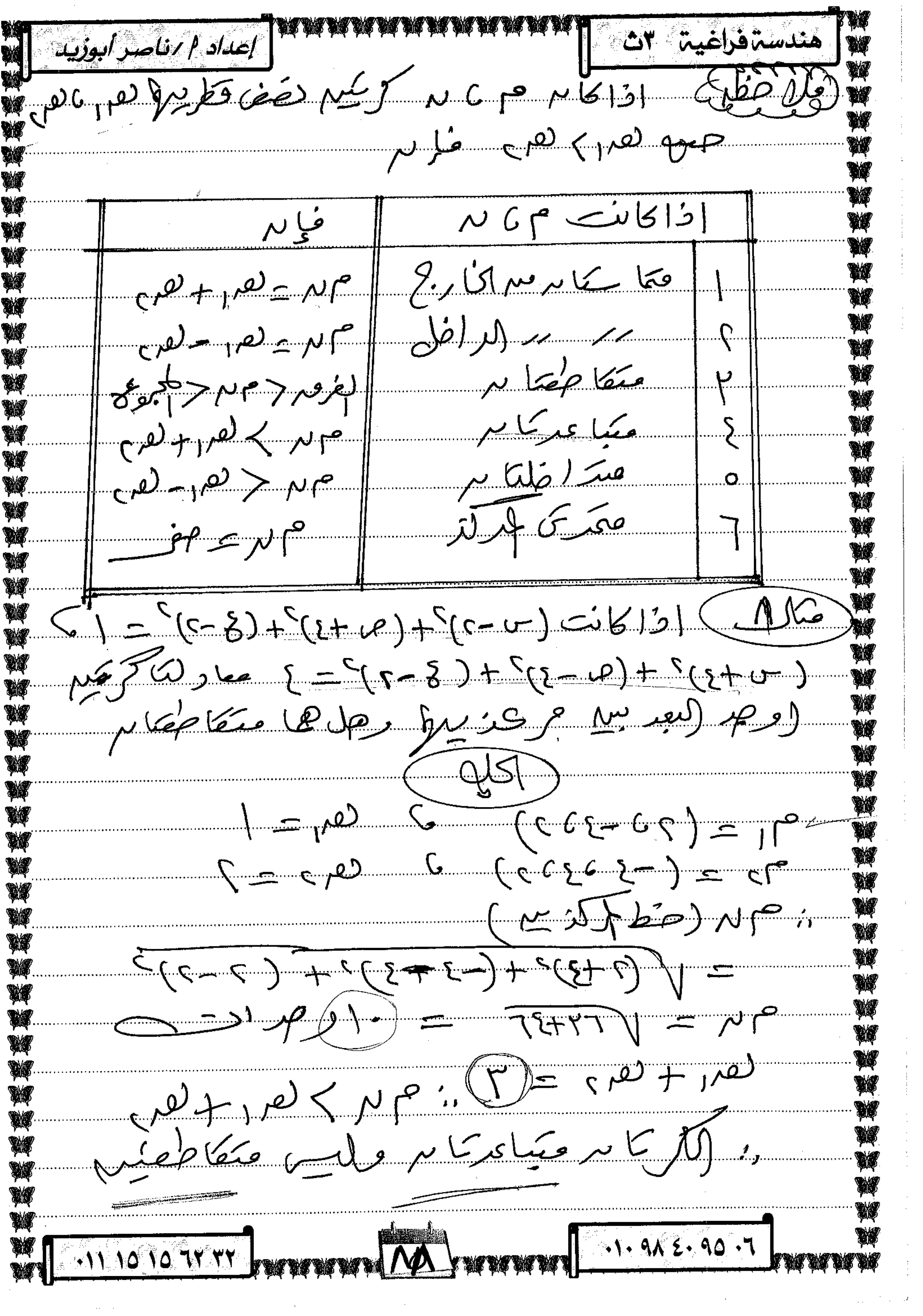
∴ $(س - ٢)^2 = ٤ \Leftarrow س - ٢ = \pm ٢$

∴ س = ٤ أو س = صفر

∴ أ = (٠، ٠، ٠) ، ب (٤، ٠، ٠)

∴ أب = $\sqrt{(٤)^2}$ = ٤ وحدة طول

إعداد أ/ ناصر أبوزيد



ملاحظة: إذا كان م ، ن مركزي كرتين نصف قطريهما نق١ ، نق٢ حيث نق١ > نق٢ فإن ن

	إذا كانت م ، ن	فإن
١	متماستان من الخارج	م ن = نق١ + نق٢
٢	" " الداخل	م ن = نق١ - نق٢
٣	متقاطعتان	الفرق < م ن < المجموع
٤	متباعدتان	م ن > نق١ + نق٢
٥	متداخلتان	م ن < نق١ - نق٢
٦	متحدتا المركز	م ن = صفر

مثال ١: إذا كانت $(س - ٢)^2 + (ص + ٤)^2 + (ع - ٢)^2 = ١$ ، $(س + ٤)^2 + (ص - ٤)^2 + (ع - ٢)^2 = ٤$ معادلتا كرتين أوجد البعد بين مركزيهما وهل هما متقاطعتان

الحل

م١ = (٢ ، -٤ ، ٢) ، نق١ = ١

م٢ = (-٤ ، ٤ ، ٢) ، نق٢ = ٢

∴ م ن (خط المركزين)

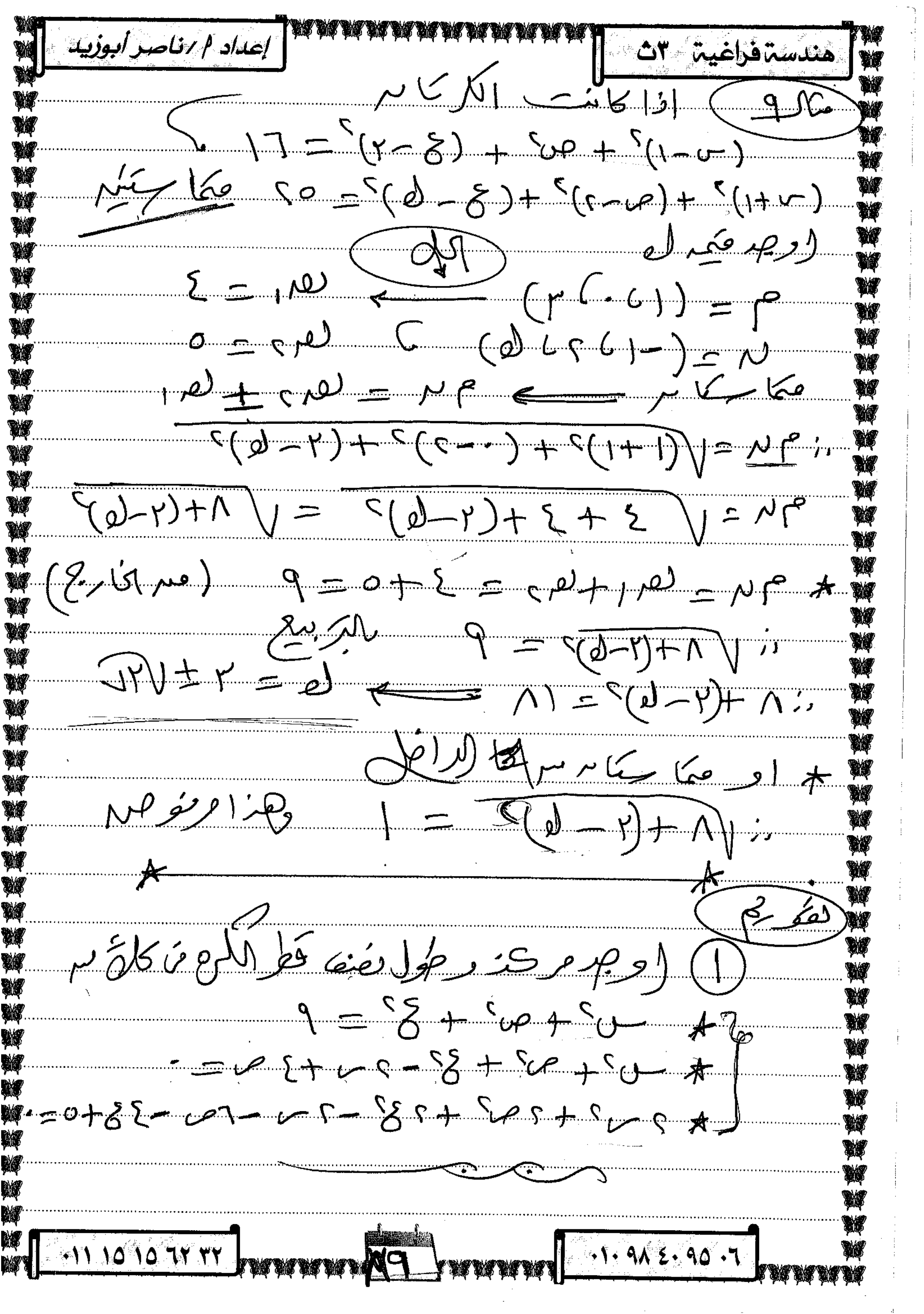
$= \sqrt{(٢ + ٤)^2 + (-٤ - ٤)^2 + (٢ - ٢)^2}$

م ن $= \sqrt{٣٦ + ٦٤} = ١٠$ وحدات

نق١ + نق٢ = ٣

∴ م ن > نق١ + نق٢

∴ الكرتان متباعدتان وليستا متقاطعتين



مثال ٩ إذا كانت الكرتان

$(س-١)^٢ + ص^٢ + (ع-٢)^٢ = ١٦$ ،

$(س+١)^٢ + (ص-٢)^٢ + (ع-ك)^٢ = ٢٥$ متماستين

أوجد قيمة ك

الحل

م = (١ ، ٠ ، ٣) ⟵ $نق_١ = ٤$

ن = (−١ ، ٢ ، ك) ، $نق_٢ = ٥$

متماستان ⟸ $م ن = نق_٢ \pm نق_١$

$\therefore م ن = \sqrt{(١+١)^٢ + (٠-٢)^٢ + (٢-ك)^٢}$

$م ن = \sqrt{٤ + ٤ + (٢-ك)^٢} = \sqrt{٨ + (٢-ك)^٢}$

* $م ن = نق_١ + نق_٢ = ٤ + ٥ = ٩$ (من الخارج)

$\therefore \sqrt{٨ + (٢-ك)^٢} = ٩$ بالتربيع

$\therefore ٨ + (٢-ك)^٢ = ٨١$ ⟸ $ك = ٢ \pm \sqrt{٧٣}$

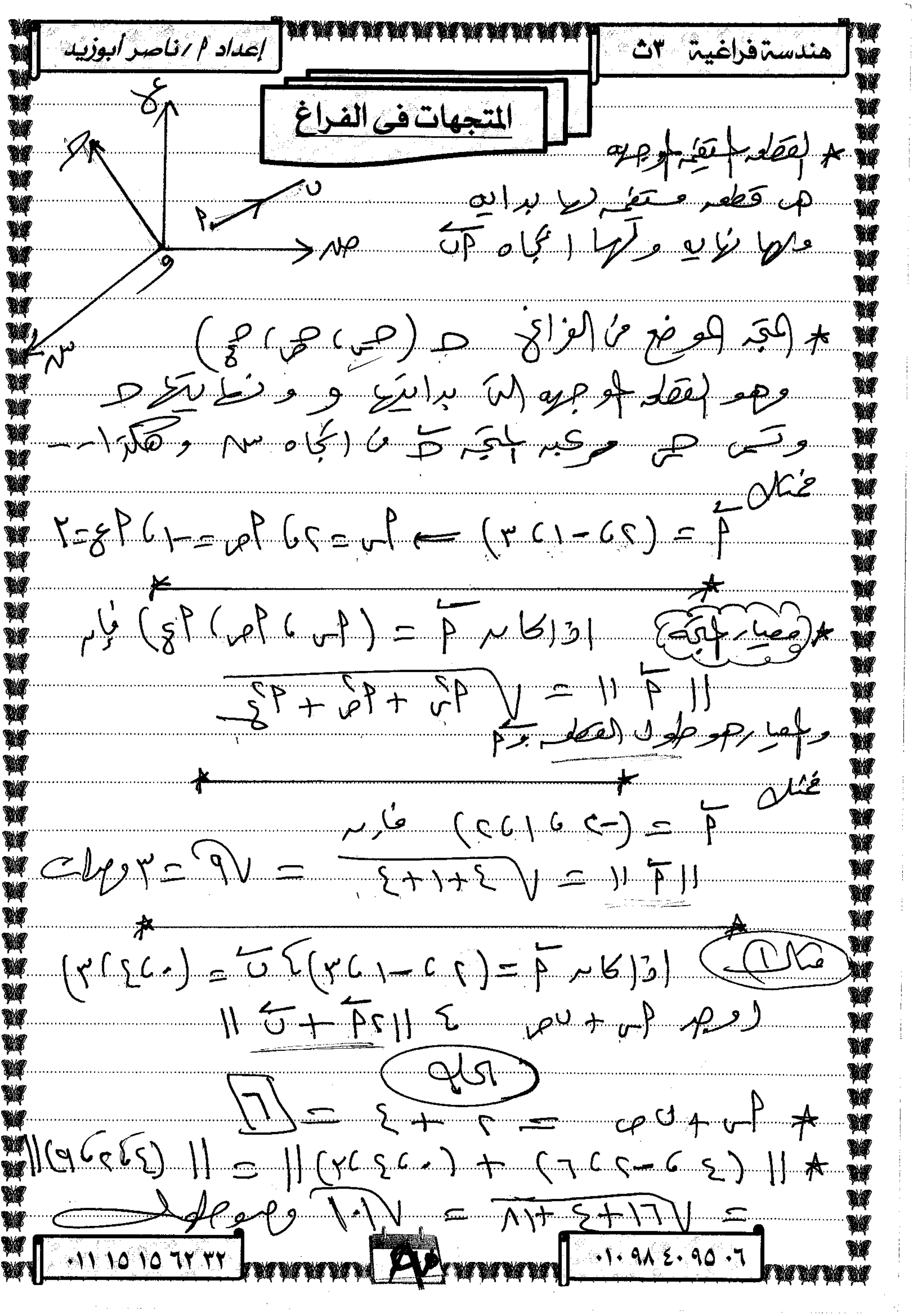
* أو متماستان من الداخل

$\therefore \sqrt{٨ + (٢-ك)^٢} = ١$ وهذا مرفوض

تمارين

(١) أوجد مركز وطول نصف قطر الكرة في كل مما يأتي

* $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ = ٩$
* $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ - ٢س + ٤ص =$
* $٢س^٢ + ٢ص^٢ + ٢ع^٢ - ٢س - ٦ص - ٤ع + ٥ = ٠$



إعداد م / ناصر ابوزيد

المتجهات فى الفراغ

* القطعة المستقيمة الموجهة

هي قطعة مستقيمة لها بداية ولها نهاية ولها اتجاه أب→

* متجه الموضع في الفراغ د (س، ص، ع)

وهو القطعة الموجهة التي بدايتها و ونهايتها د

وتسمى س مركبة المتجه د→ في اتجاه س وهكذا...

مثال

أ→ = (٢، -١، ٣) ← أس = ٢، أص = -١، أع = ٢

* معيار المتجه

إذا كان أ→ = (أس، أص، أع) فإن

||أ→|| = √(أس² + أص² + أع²)

والمعيار هو طول القطعة الموجهة

مثال

أ→ = (-٢، ١، ٢) فإن

||أ→|| = √(٤+١+٤) = √٩ = ٣ وحدات

مثال (١)

إذا كان أ→ = (٢، -١، ٣)، ب→ = (٠، ٤، ٣)

أوجد أس + بص ، ||٢أ→ + ب→||

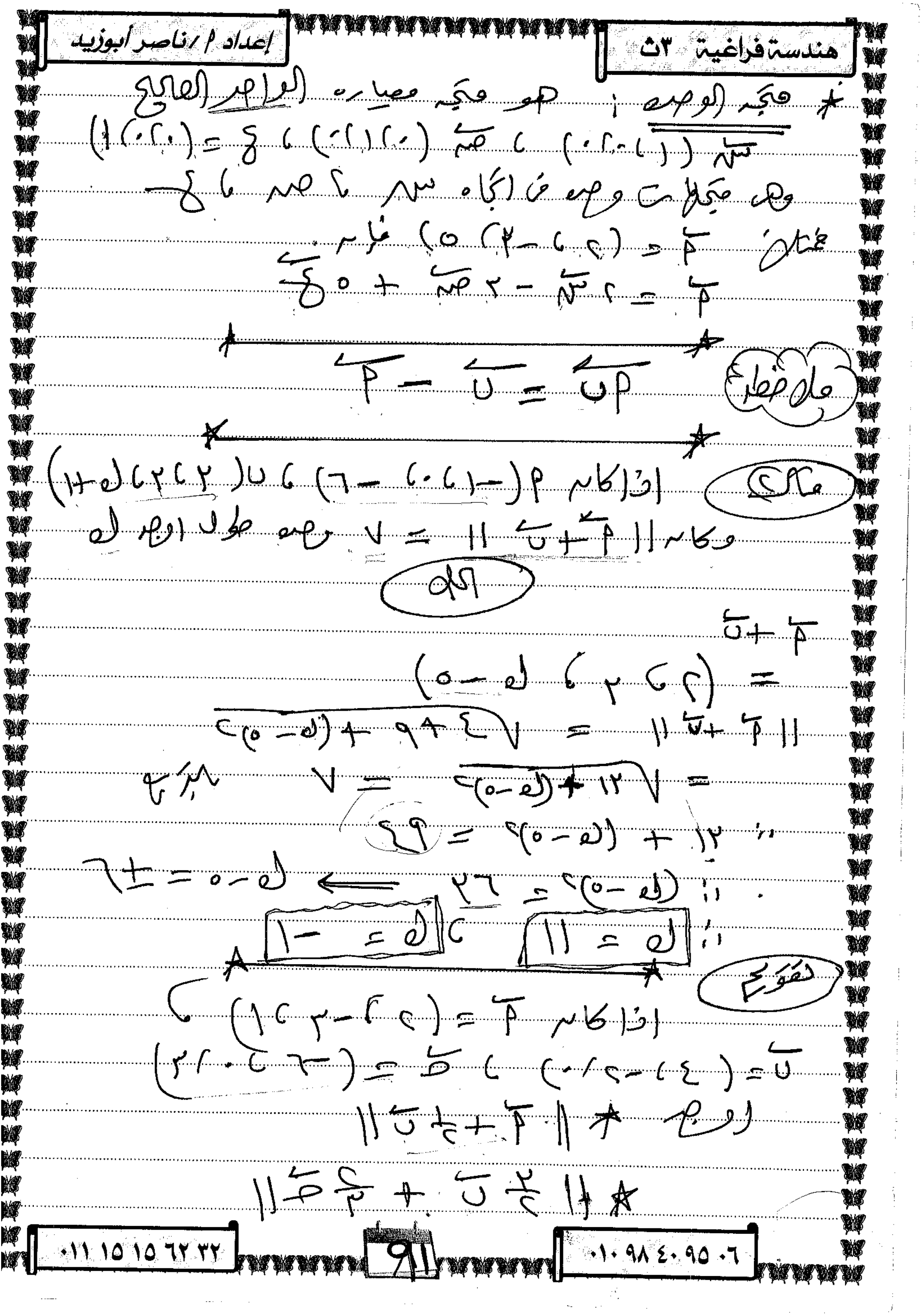
الحل

* أس + بص = ٢ + ٤ = ٦

* ||(٤، -٢، ٦) + (٠، ٤، ٣)|| = ||(٤، ٢، ٩)||

= √(١٦+٤+٨١) = √١٠١ وهو المطلوب

٠١١١٥١٥٦٢٣٢ ٠١٠٩٨٤٠٩٥٠٦



* متجه الوحدة : هو متجه معياره الواحد الصحيح

$\overrightarrow{س} = (١ ، ٠ ، ٠)$ ، $\overrightarrow{ص} = (٠ ، ١ ، ٠)$ ، $\overrightarrow{ع} = (٠ ، ٠ ، ١)$

وهي متجهات وحدة في اتجاه س ، ص ، ع

مثال: $\overrightarrow{أ} = (٢ ، -٣ ، ٥)$ فإن

$\overrightarrow{أ} = ٢\overrightarrow{س} - ٣\overrightarrow{ص} + ٥\overrightarrow{ع}$

ملاحظة: $\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ}$

مثال: إذا كان أ $(-١ ، ٠ ، -٦)$ ، ب $(٢ ، ٢ ، ل+١)$ وكان $\|\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}\| = ٧$ فأوجد قيمة ل

الحل

$\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}$

$= (٣ ، ٢ ، ل - ٥)$

$\|\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}\| = \sqrt{٩ + ٤ + (ل - ٥)^٢}$

$= \sqrt{١٣ + (ل - ٥)^٢} = ٧$ بالتربيع

$\therefore ١٣ + (ل - ٥)^٢ = ٤٩$

$\therefore (ل - ٥)^٢ = ٣٦ \Leftarrow ل - ٥ = \pm ٦$

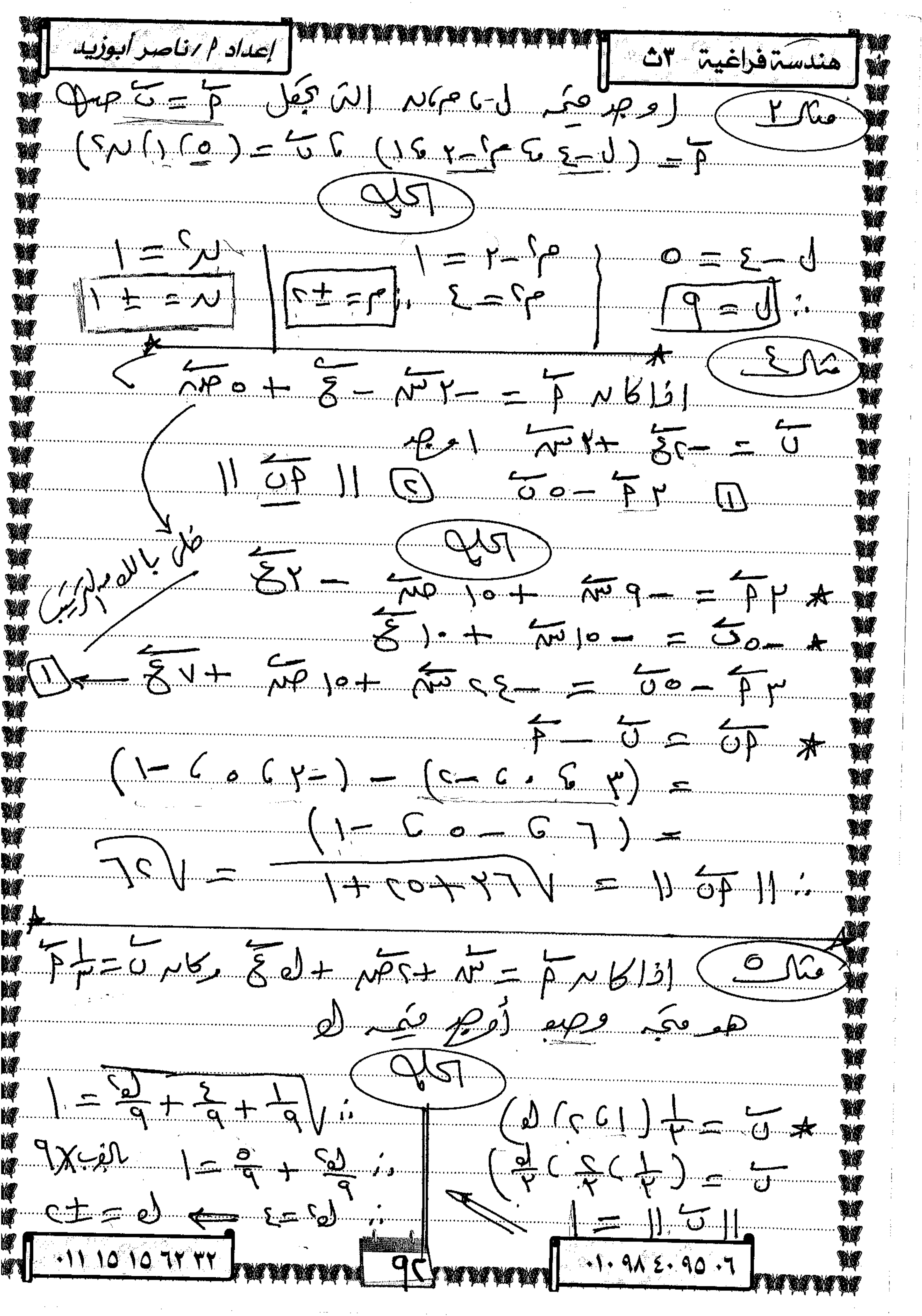
$\therefore ل = ١١$ ، $ل = -١$

تقويم

إذا كان $\overrightarrow{أ} = (٢ ، -٣ ، ١)$ ، $\overrightarrow{ب} = (٤ ، -٢ ، ٠)$ ، $\overrightarrow{جـ} = (-٦ ، ٠ ، ٣)$

أوجد * $\|\overrightarrow{أ} + \frac{١}{٢}\overrightarrow{ب}\|$

* $\|\frac{١}{٢}\overrightarrow{ب} + \frac{٢}{٣}\overrightarrow{جـ}\|$



مثال ٢ أوجد قيمة ل ، م ، ن التي تجعل $\overrightarrow{م} = \overrightarrow{ن}$ حيث
$\overrightarrow{م} = (ل - ٤ ، م^{٢} - ٢ ، ١)$ ، $\overrightarrow{ن} = (٥ ، ١ ، ن^{٢})$

الحل

ل − ٤ = ٥ ∴ ل = ٩ | م² − ٢ = ١ ، م² = ٤ ، م = ±٢ | ن² = ١ ، ن = ±١

مثال ٤ إذا كان $\overrightarrow{أ} = -٢\overrightarrow{س} - \overrightarrow{ع} + ٥\overrightarrow{ص}$
$\overrightarrow{ب} = -٢\overrightarrow{ع} + ٢\overrightarrow{س}$ أوجد
(١) $٣\overrightarrow{أ} - ٥\overrightarrow{ب}$ (٢) $\|\overrightarrow{أب}\|$

الحل

حل بالإحداثيات

* $٣\overrightarrow{أ} = -٩\overrightarrow{س} + ١٠\overrightarrow{ص} - ٢\overrightarrow{ع}$
* $-٥\overrightarrow{ب} = -١٠\overrightarrow{س} + ١٠\overrightarrow{ع}$

$٣\overrightarrow{أ} - ٥\overrightarrow{ب} = -٤٢\overrightarrow{س} + ١٠\overrightarrow{ص} + ٧\overrightarrow{ع}$ ← (١)

* $\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ}$
= (٣ ، ٠ ، −٢) − (−٢ ، ٥ ، −١)
= (٦ ، −٥ ، −١)

∴ $\|\overrightarrow{أب}\| = \sqrt{٣٦ + ٢٥ + ١} = \sqrt{٦٢}$

مثال ٥ إذا كان $\overrightarrow{م} = \overrightarrow{س} + ٢\overrightarrow{ص} + ك\overrightarrow{ع}$ وكان $\overrightarrow{ن} = \frac{١}{٣}\overrightarrow{م}$
هو متجه وحدة أوجد قيمة ك

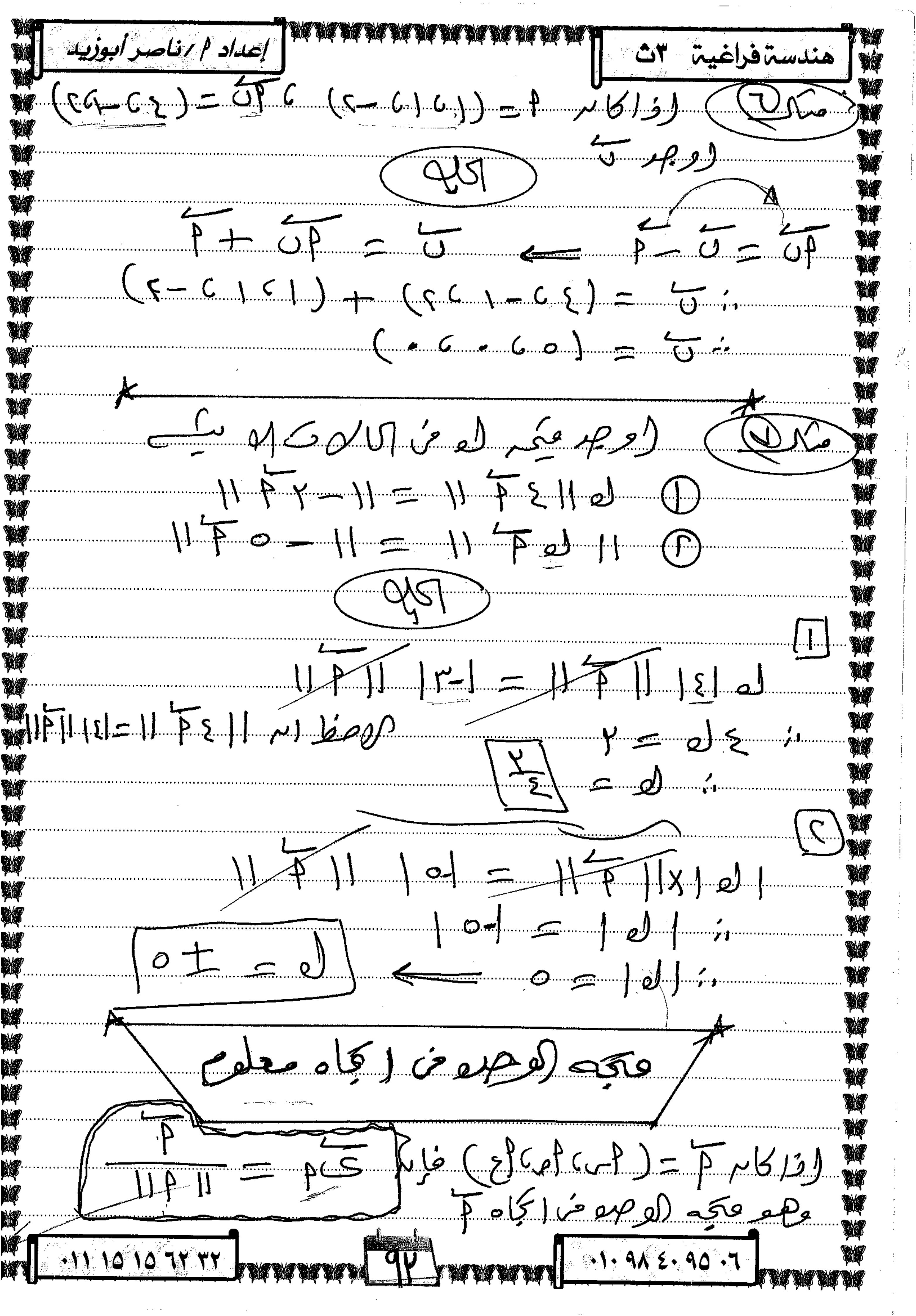
الحل

* $\overrightarrow{ن} = \frac{١}{٣}(١ ، ٢ ، ك)$
$\overrightarrow{ن} = (\frac{١}{٣} ، \frac{٢}{٣} ، \frac{ك}{٣})$
$\|\overrightarrow{ن}\| = ١$

∴ $\sqrt{\frac{١}{٩} + \frac{٤}{٩} + \frac{ك^{٢}}{٩}} = ١$

∴ $\frac{ك^{٢}}{٩} + \frac{٥}{٩} = ١$ بالضرب × ٩

∴ ك² = ٤ ← ك = ±٢



مثال ⑥ إذا كان $أ = (١ ، ١ ، -٢)$ ، $\overrightarrow{أب} = (٤ ، -١ ، ٢)$

اوجد $\overrightarrow{ب}$

الحل

$\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ} \Longrightarrow \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{أب} + \overrightarrow{أ}$

$\therefore \overrightarrow{ب} = (٤ ، -١ ، ٢) + (١ ، ١ ، -٢)$

$\therefore \overrightarrow{ب} = (٥ ، ٠ ، ٠)$

مثال ⑦ اوجد قيمة ك من الحالات الآتية

① $\| ٤ك \overrightarrow{أ} \| = \| -٢ \overrightarrow{أ} \|$

② $\| ك \overrightarrow{أ} \| = \| -٥ \overrightarrow{أ} \|$

الحل

①

$|٤ك| \, \| \overrightarrow{أ} \| = |-٢| \, \| \overrightarrow{أ} \|$

ملاحظة $\| ٤ \overrightarrow{أ} \| = |٤| \, \| \overrightarrow{أ} \|$

$\therefore ٤ك = ٢$

$\therefore ك = \frac{٢}{٤}$

②

$|ك| \, \| \overrightarrow{أ} \| = |-٥| \, \| \overrightarrow{أ} \|$

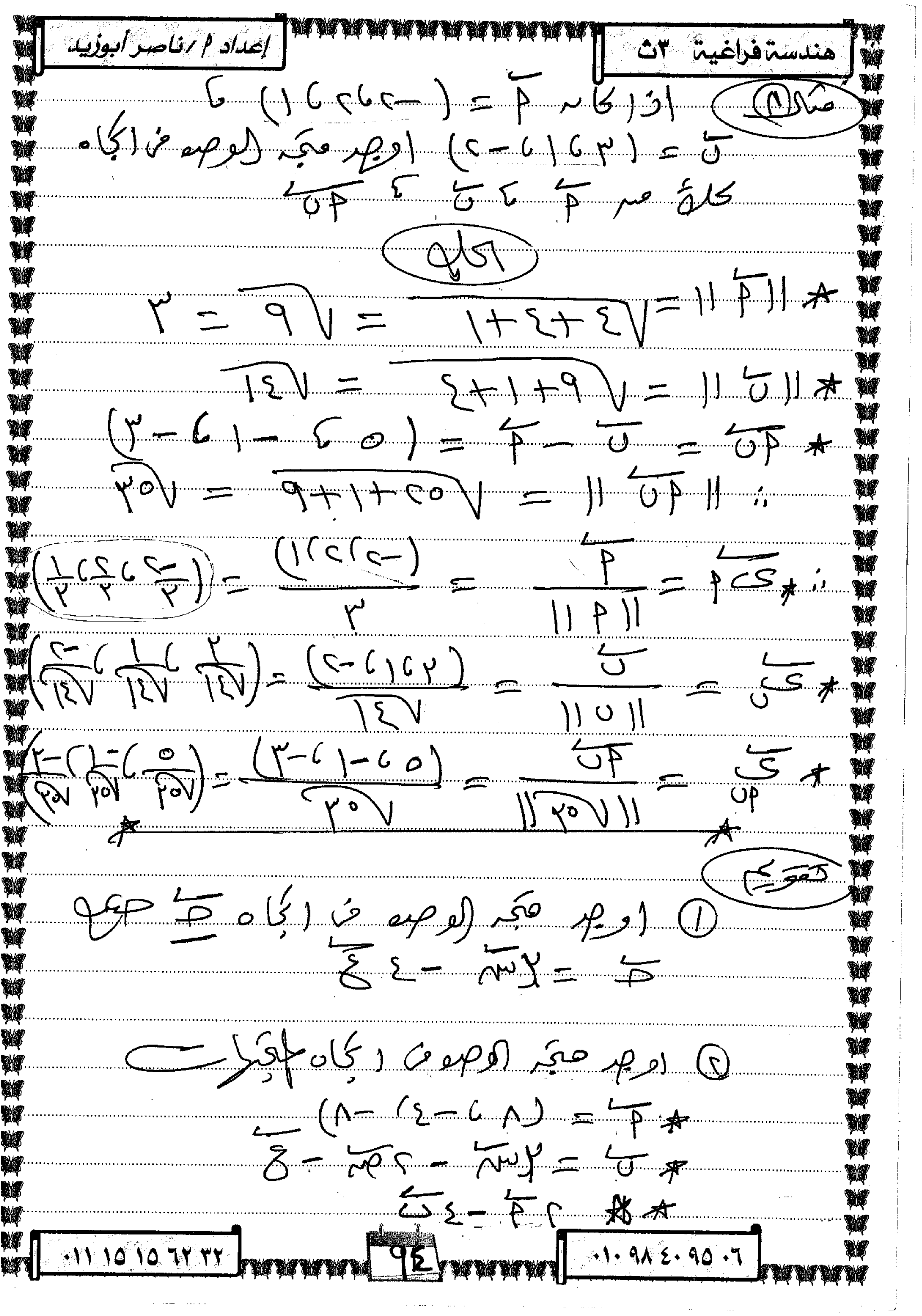
$\therefore |ك| = |-٥|$

$\therefore |ك| = ٥ \Longrightarrow ك = \pm ٥$

متجه الوحدة في اتجاه معلوم

إذا كان $\overrightarrow{أ} = (أ_س ، أ_ص ، أ_ع)$ فإن $\overrightarrow{و_أ} = \frac{\overrightarrow{أ}}{\| \overrightarrow{أ} \|}$

وهو متجه الوحدة في اتجاه $\overrightarrow{أ}$



إعداد أ / ناصر أبوزيد

مثال (٨) إذا كانت أ = (−٢، ٢، ١) ، ب = (٣، ١، −٢) أوجد متجه الوحدة في اتجاه كل من أ ، ب ، أب

الحل

* ||أ|| = √(٤+٤+١) = √٩ = ٣
* ||ب|| = √(٩+١+٤) = √١٤
* أب = ب − أ = (٥، −١، −٣)

∴ ||أب|| = √(٢٥+١+٩) = √٣٥

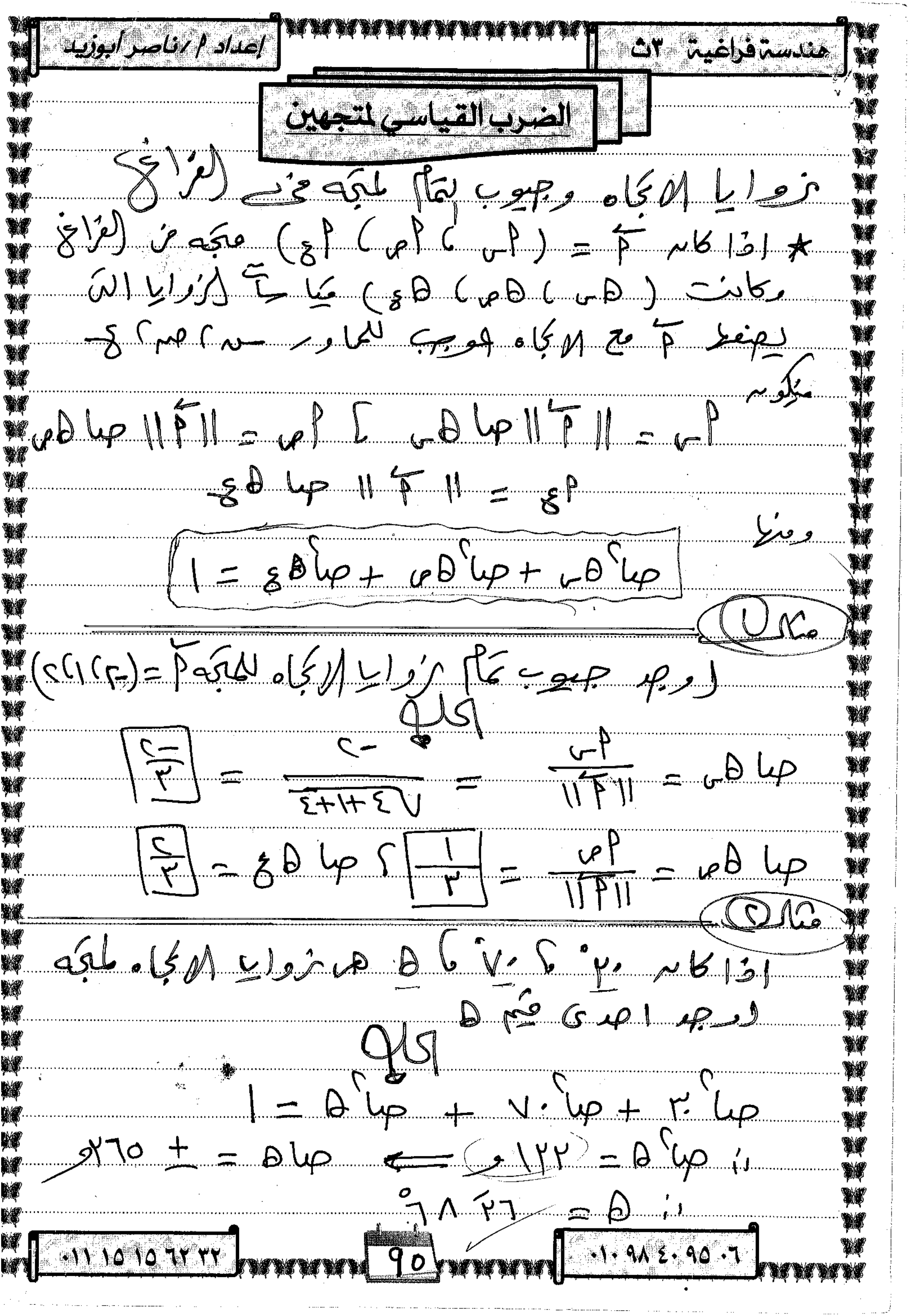
* ∴ ىأ = أ / ||أ|| = (−٢، ٢، ١) / ٣ = (−٢/٣ ، ٢/٣ ، ١/٣)
* ىب = ب / ||ب|| = (٣، ١، −٢) / √١٤ = (٣/√١٤ ، ١/√١٤ ، −٢/√١٤)
* ىأب = أب / ||أب|| = (٥، −١، −٣) / √٣٥ = (٥/√٣٥ ، −١/√٣٥ ، −٣/√٣٥)

تقويم

① أوجد متجه الوحدة في اتجاه ج حيث
ج = ٢س ٣ص − ٤ع

② أوجد متجه الوحدة في اتجاه المتجهات

* أ = (٨، −٤، −٨)
* ب = ٢س − ٢ص − ع
* ٢أ − ٤ب



الضرب القياسي لمتجهين

زوايا الاتجاه وجيوب تمام متجه في الفراغ

★ إذا كان $\vec{أ}$ = (أس ، أص ، أع) متجه في الفراغ
وكانت (هـس ، هـص ، هـع) قياسات الزوايا التي
يصنعها $\vec{أ}$ مع الاتجاه الموجب للمحاور س ، ص ، ع
مركبته

أس = ||$\vec{أ}$|| جتا هـس ، أص = ||$\vec{أ}$|| جتا هـص

أع = ||$\vec{أ}$|| جتا هـع

ومنها

جتا² هـس + جتا² هـص + جتا² هـع = ١

مثال ١

أوجد جيوب تمام زوايا الاتجاه للمتجه $\vec{أ}$ = (-٢ ، ١ ، ٢)

الحل

جتا هـس = أس / ||$\vec{أ}$|| = -٢ / √(٤+١+٤) = **-٢/٣**

جتا هـص = أص / ||$\vec{أ}$|| = **١/٣** ، جتا هـع = **٢/٣**

مثال ٢

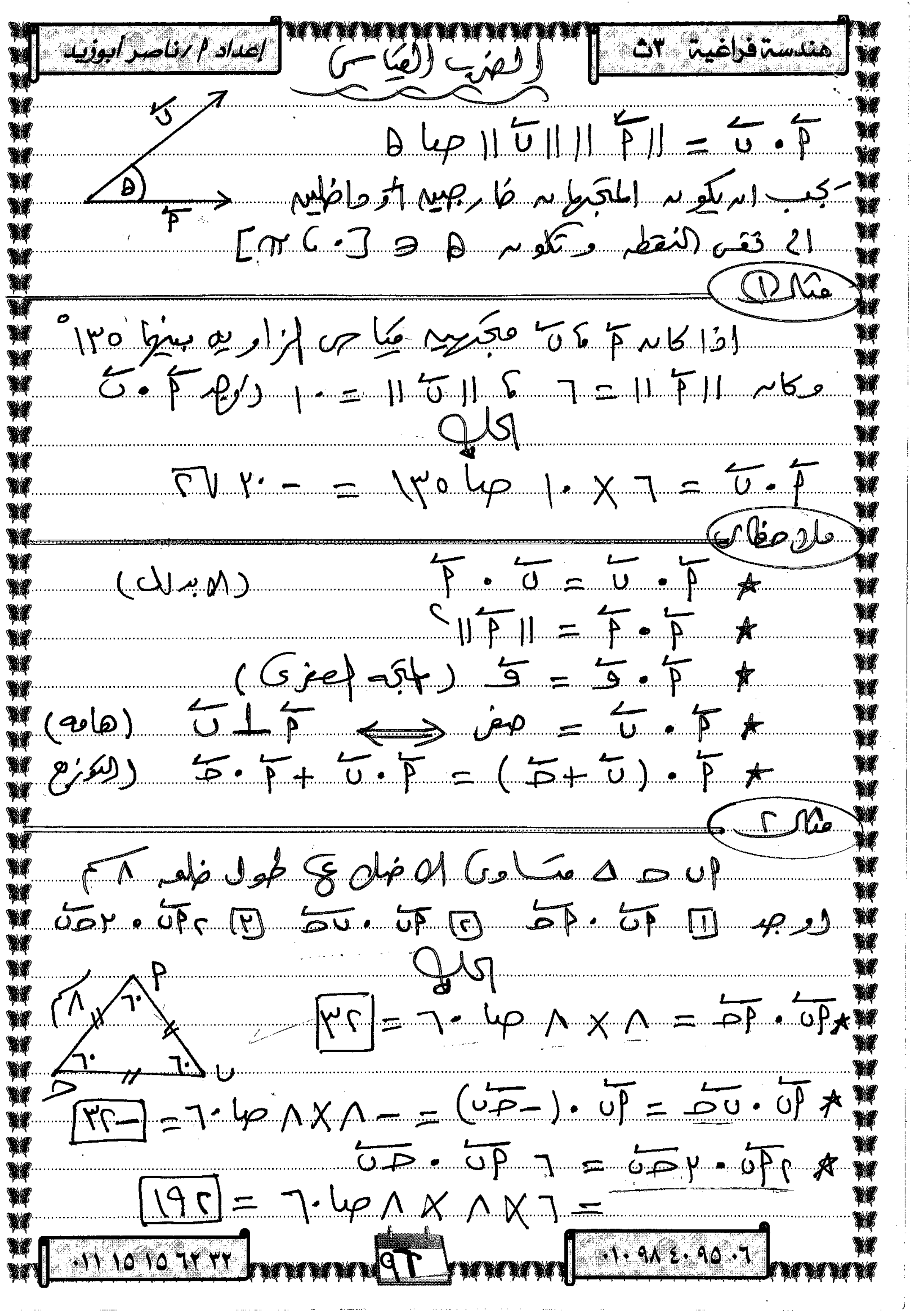
إذا كان ٣٠° ، ٧٠° ، هـ هي زوايا الاتجاه لمتجه
أوجد إحدى قيم هـ

الحل

جتا² ٣٠ + جتا² ٧٠ + جتا² هـ = ١

∴ جتا² هـ = ١٢٢ و ⟸ جتا هـ = ± ٣٦٥ و

∴ هـ = ٦٨° ٢٦



الضرب القياسي

أ⃗ . ب⃗ = ||أ⃗|| ||ب⃗|| جتا هـ

حيث ان يكون المتجهان خارجين أو داخلين إلى نفس النقطة وتكون هـ ∈ [٠ ، π]

مثال ١

اذا كان أ⃗ ، ب⃗ متجهين قياس الزاوية بينهما ١٣٥° وكان ||أ⃗|| = ٦ ، ||ب⃗|| = ١٠ اوجد أ⃗ . ب⃗

الحل

أ⃗ . ب⃗ = ٦ × ١٠ جتا ١٣٥ = - ٣٠ √٢

ملاحظات

* أ⃗ . ب⃗ = ب⃗ . أ⃗ (الابدال)
* أ⃗ . أ⃗ = ||أ⃗||²
* أ⃗ . و⃗ = و⃗ (المتجه الصفري)
* أ⃗ . ب⃗ = صفر ⟺ أ⃗ ⊥ ب⃗ (هامة)
* أ⃗ . (ب⃗ + جـ⃗) = أ⃗ . ب⃗ + أ⃗ . جـ⃗ (التوزيع)

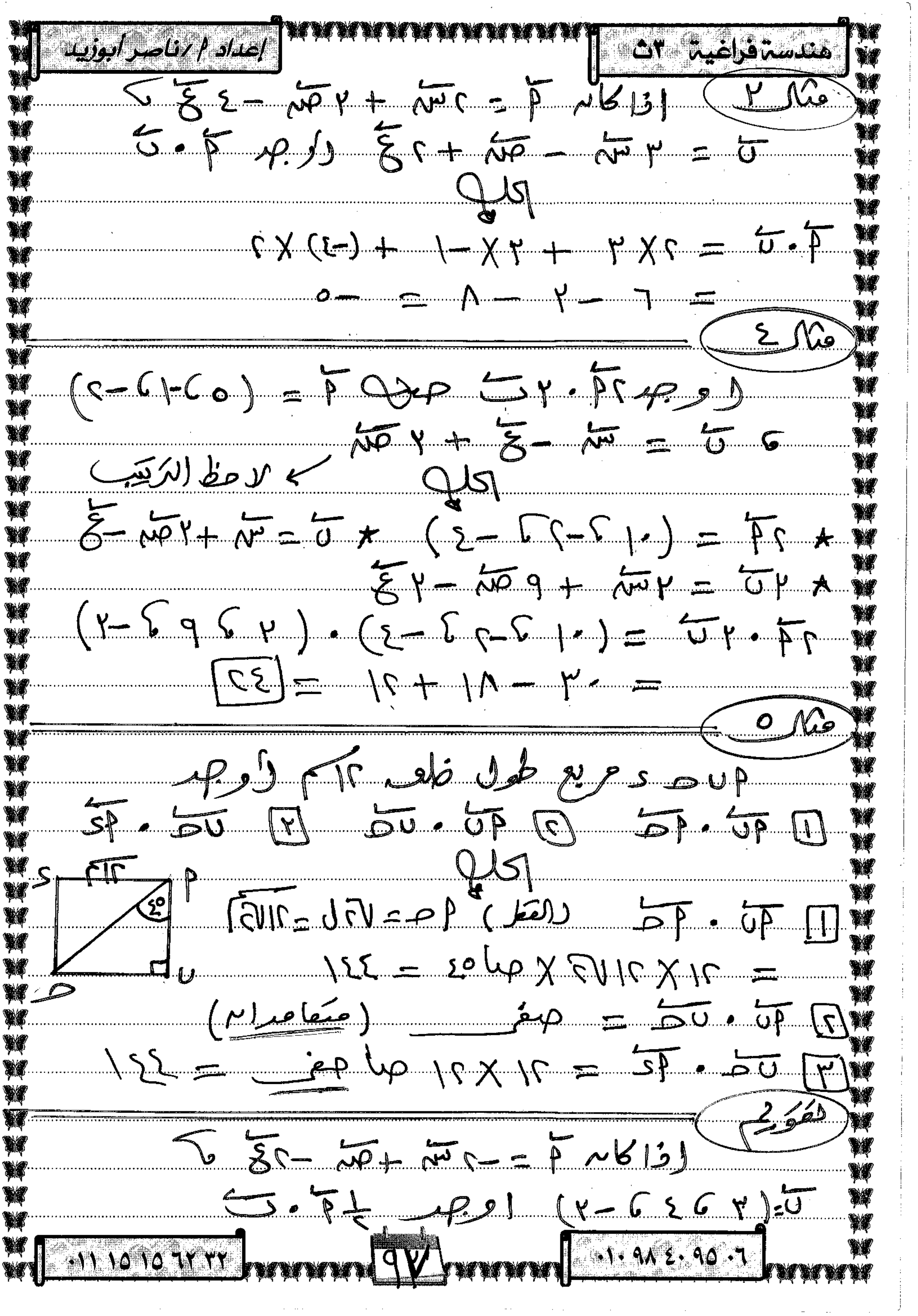
مثال ٢

أ ب جـ Δ متساوي الاضلاع طول ضلعه ٨ سم

اوجد [١] أب⃗ . أجـ⃗ [٢] أب⃗ . ب جـ⃗ [٣] ٣ أب⃗ . ٢ جـ ب⃗

الحل

* أب⃗ . أجـ⃗ = ٨ × ٨ جتا ٦٠ = **٣٢**
* أب⃗ . ب جـ⃗ = أب⃗ . (- جـ ب⃗) = - ٨ × ٨ جتا ٦٠ = **-٣٢**
* ٣ أب⃗ . ٢ جـ ب⃗ = ٦ أب⃗ . جـ ب⃗ = ٦ × ٨ × ٨ جتا ٦٠ = **١٩٢**



مثال ٣

إذا كان أ = ٢س + ٢ص − ٤ع ،
ب = ٣س − ص + ٢ع أوجد أ · ب

الحل

أ · ب = ٢ × ٣ + ٢ × −١ + (−٤) × ٢
= ٦ − ٢ − ٨ = −٥

مثال ٤

أوجد ٢أ · ٢ب حيث أ = (٥، −١، −٢)
، ب = س − ع + ٢ص

الحل ← لاحظ الترتيب

★ ٢أ = (١٠، −٢، −٤) ★ ب = س + ٢ص − ع
★ ٢ب = ٢س + ٩ص − ٢ع
٢أ · ٢ب = (١٠، −٢، −٤) · (٢، ٩، −٢)
= ٣٠ − ١٨ + ١٢ = **٢٤**

مثال ٥

أ ب ج د مربع طول ضلعه ١٢ سم أوجد
[١] أب · أج [٢] أب · ب ج [٣] ب ج · أ د

الحل

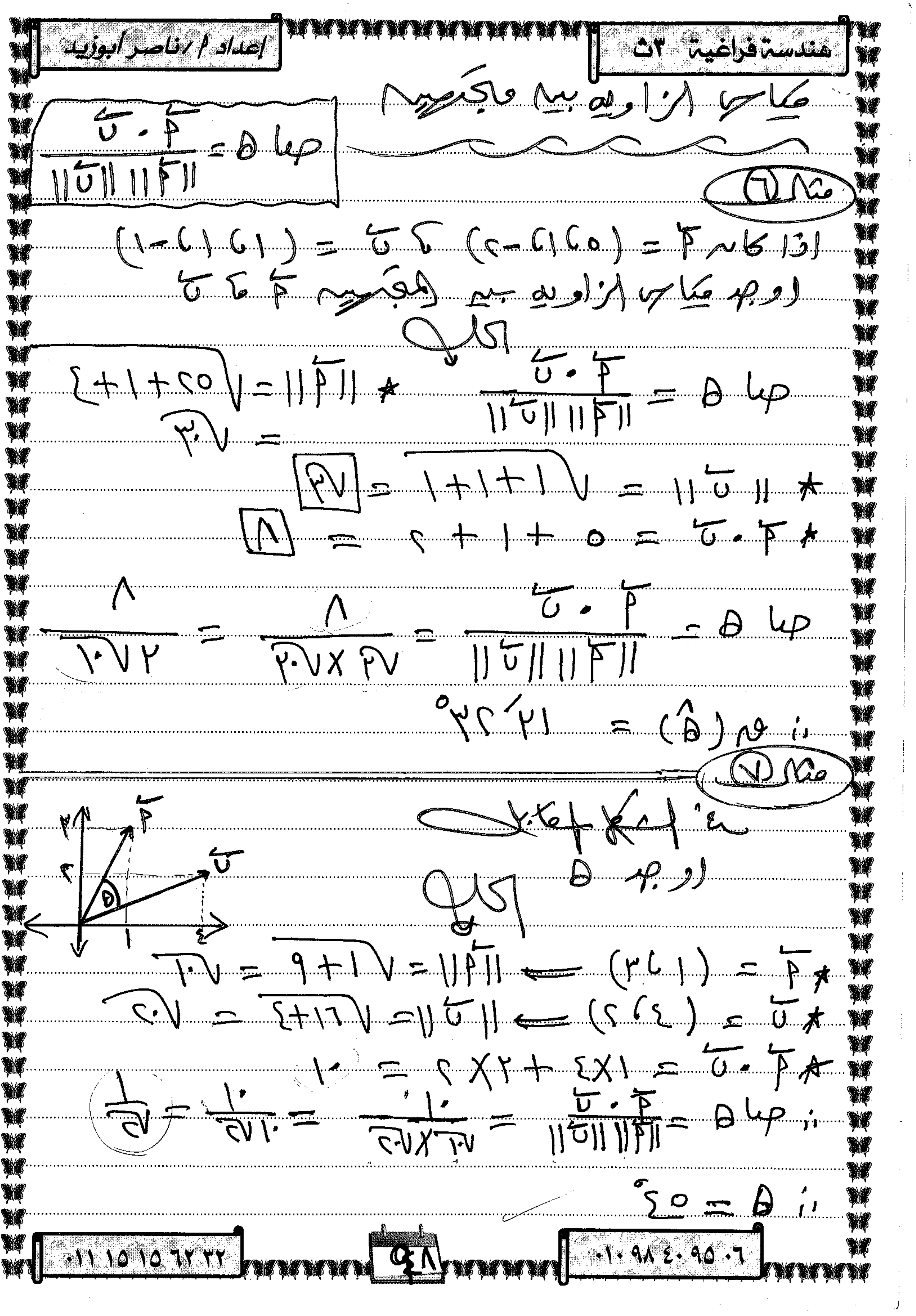
[١] أب · أج (القطر) أج = ل√٢ = ١٢√٢
= ١٢ × ١٢√٢ × جتا ٤٥ = ١٤٤

[٢] أب · ب ج = صفر (متعامدان)

[٣] ب ج · أ د = ١٢ × ١٢ جتا صفر = ١٤٤

تمرين

إذا كان أ = −٢س + ص − ٢ع ،
ب = (٣، ٤، −٢) أوجد ½ أ · ب



قياس الزاوية بين متجهين

$$\text{جتا هـ} = \frac{\vec{أ} \cdot \vec{ب}}{\|\vec{أ}\| \, \|\vec{ب}\|}$$

مثال (٦)

إذا كان $\vec{أ} = (٥ ، ١ ، -٢)$ ، $\vec{ب} = (١ ، ١ ، -١)$

أوجد قياس الزاوية بين المتجهين $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$

الحل

$$\text{جتا هـ} = \frac{\vec{أ} \cdot \vec{ب}}{\|\vec{أ}\| \, \|\vec{ب}\|}$$

* $\|\vec{أ}\| = \sqrt{٢٥ + ١ + ٤} = \sqrt{٣٠}$

* $\|\vec{ب}\| = \sqrt{١ + ١ + ١} = \sqrt{٣}$

* $\vec{أ} \cdot \vec{ب} = ٥ + ١ + ٢ = ٨$

$$\text{جتا هـ} = \frac{\vec{أ} \cdot \vec{ب}}{\|\vec{أ}\| \, \|\vec{ب}\|} = \frac{٨}{\sqrt{٣٠} \times \sqrt{٣}} = \frac{٨}{٣\sqrt{١٠}}$$

∴ $ق(\hat{هـ}) = ٣٢° \; ٣٢' \; ٢١''$

مثال (٧)

من الشكل المقابل أوجد هـ

الحل

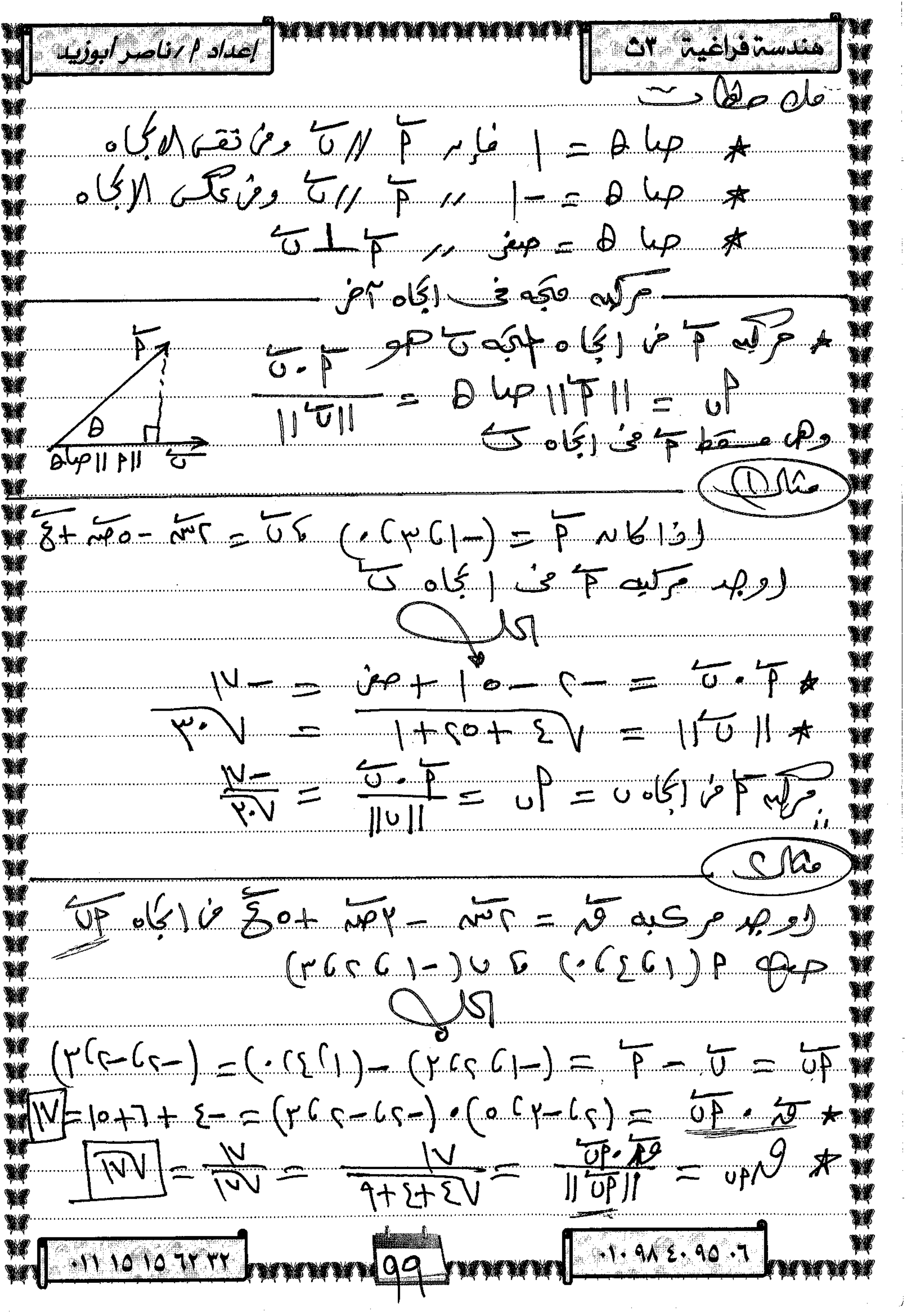
* $\vec{أ} = (١ ، ٣) \Leftarrow \|\vec{أ}\| = \sqrt{١ + ٩} = \sqrt{١٠}$

* $\vec{ب} = (٤ ، ٢) \Leftarrow \|\vec{ب}\| = \sqrt{١٦ + ٤} = \sqrt{٢٠}$

* $\vec{أ} \cdot \vec{ب} = ١ \times ٤ + ٣ \times ٢ = ١٠$

∴ $\text{جتا هـ} = \frac{\vec{أ} \cdot \vec{ب}}{\|\vec{أ}\| \, \|\vec{ب}\|} = \frac{١٠}{\sqrt{١٠} \times \sqrt{٢٠}} = \frac{١٠}{١٠\sqrt{٢}} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$

∴ هـ = ٤٥°



ملاحظات

* جتا θ = ١ فإن $\overline{أ} \parallel \overline{ب}$ ونفس الاتجاه
* جتا θ = -١ " $\overline{أ} \parallel \overline{ب}$ وعكس الاتجاه
* جتا θ = صفر " $\overline{أ} \perp \overline{ب}$

مركبة متجه في اتجاه متجه

* مركبة $\overline{أ}$ في اتجاه متجه $\overline{ب}$ هو

$$أ_ب = \|\overline{أ}\| \text{ جتا } \theta = \frac{\overline{أ} \cdot \overline{ب}}{\|\overline{ب}\|}$$

وهي مسقط $\overline{أ}$ في اتجاه $\overline{ب}$

مثال (١)

إذا كان $\overline{أ} = (-١ ، ٣ ، ٠)$ ، $\overline{ب} = ٢\overline{س} - ٥\overline{ص} + ٤\overline{ع}$

أوجد مركبة $\overline{أ}$ في اتجاه $\overline{ب}$

الحل

* $\overline{أ} \cdot \overline{ب} = -٢ - ١٥ + \text{صفر} = -١٧$
* $\|\overline{ب}\| = \sqrt{٤ + ٢٥ + ١} = \sqrt{٣٠}$

مركبة $\overline{أ}$ في اتجاه $\overline{ب}$ = $أ_ب = \frac{\overline{أ} \cdot \overline{ب}}{\|\overline{ب}\|} = \frac{-١٧}{\sqrt{٣٠}}$

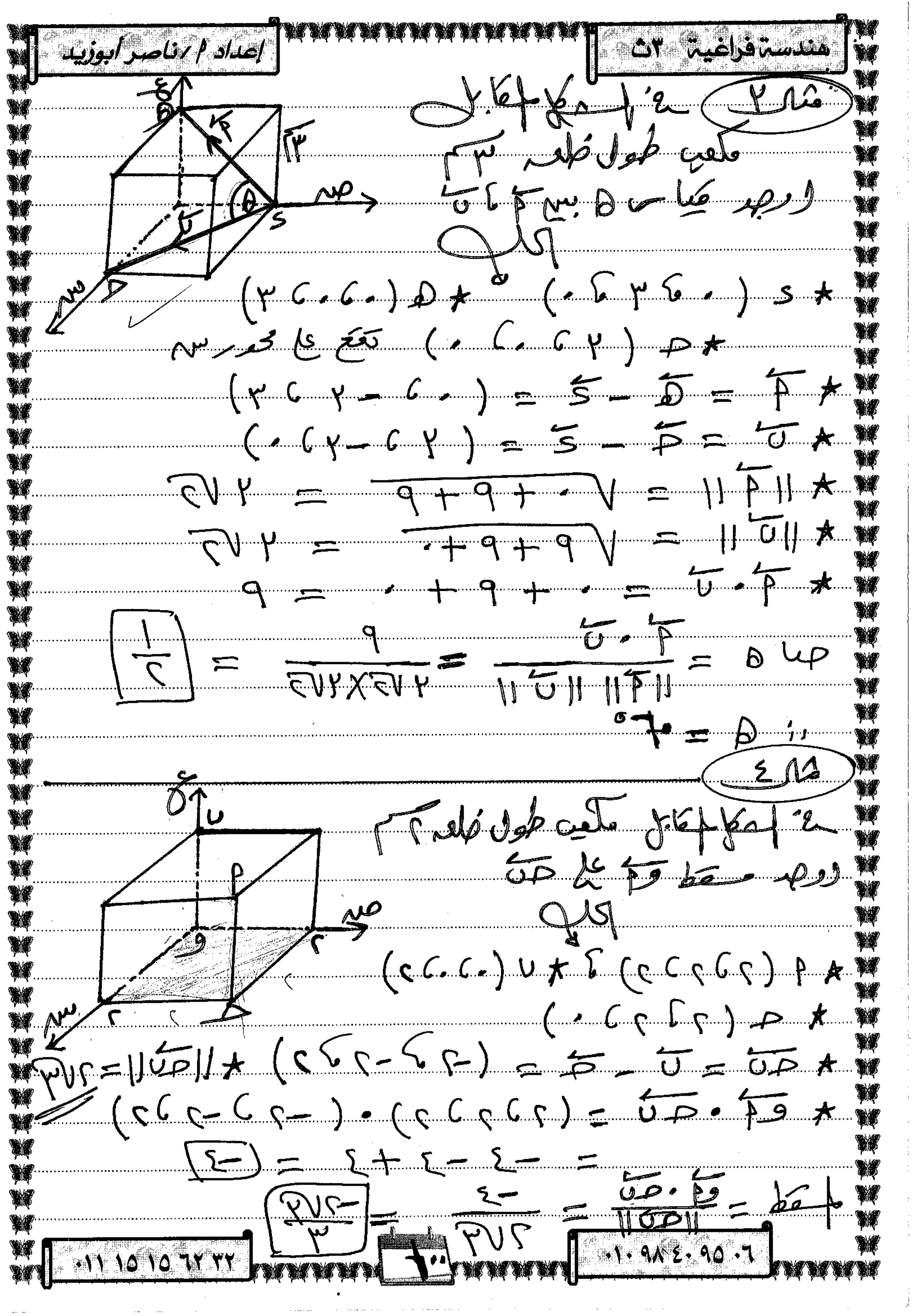
مثال (٢)

أوجد مركبة $\overline{ق} = ٢\overline{س} - ٢\overline{ص} + ٥\overline{ع}$ في اتجاه $\overline{أب}$ حيث أ(١ ، ٤ ، ٠) ، ب(-١ ، ٢ ، ٣)

الحل

$\overline{أب} = \overline{ب} - \overline{أ} = (-١ ، ٢ ، ٣) - (١ ، ٤ ، ٠) = (-٢ ، -٢ ، ٣)$

* $\overline{ق} \cdot \overline{أب} = (٢ ، -٢ ، ٥) \cdot (-٢ ، -٢ ، ٣) = -٤ + ٦ + ١٥ = ١٧$
* $ق_{أب} = \frac{\overline{ق} \cdot \overline{أب}}{\|\overline{أب}\|} = \frac{١٧}{\sqrt{٤ + ٤ + ٩}} = \frac{١٧}{\sqrt{١٧}} = \sqrt{١٧}$



إعداد أ / ناصر ابوزيد

مثال ٢

في الشكل المقابل مكعب طول ضلعه ٣ سم

أوجد قياس θ بين $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$

الحل

* د (٠ ، ٣ ، ٠) * هـ (٠ ، ٠ ، ٣)
* جـ (٣ ، ٠ ، ٠) تقع على محور س
* $\vec{أ}$ = $\vec{هـ}$ − $\vec{د}$ = (٠ ، −٣ ، ٣)
* $\vec{ب}$ = $\vec{جـ}$ − $\vec{د}$ = (٣ ، −٣ ، ٠)
* ||$\vec{أ}$|| = √(٠ + ٩ + ٩) = ٣√٢
* ||$\vec{ب}$|| = √(٩ + ٩ + ٠) = ٣√٢
* $\vec{أ}$ • $\vec{ب}$ = ٠ + ٩ + ٠ = ٩

جتا θ = ($\vec{أ}$ • $\vec{ب}$) / (||$\vec{أ}$|| ||$\vec{ب}$||) = ٩ / (٣√٢ × ٣√٢) = ١/٢

∴ θ = ٦٠°

مثال ٤

في الشكل المقابل مكعب طول ضلعه ٢ سم

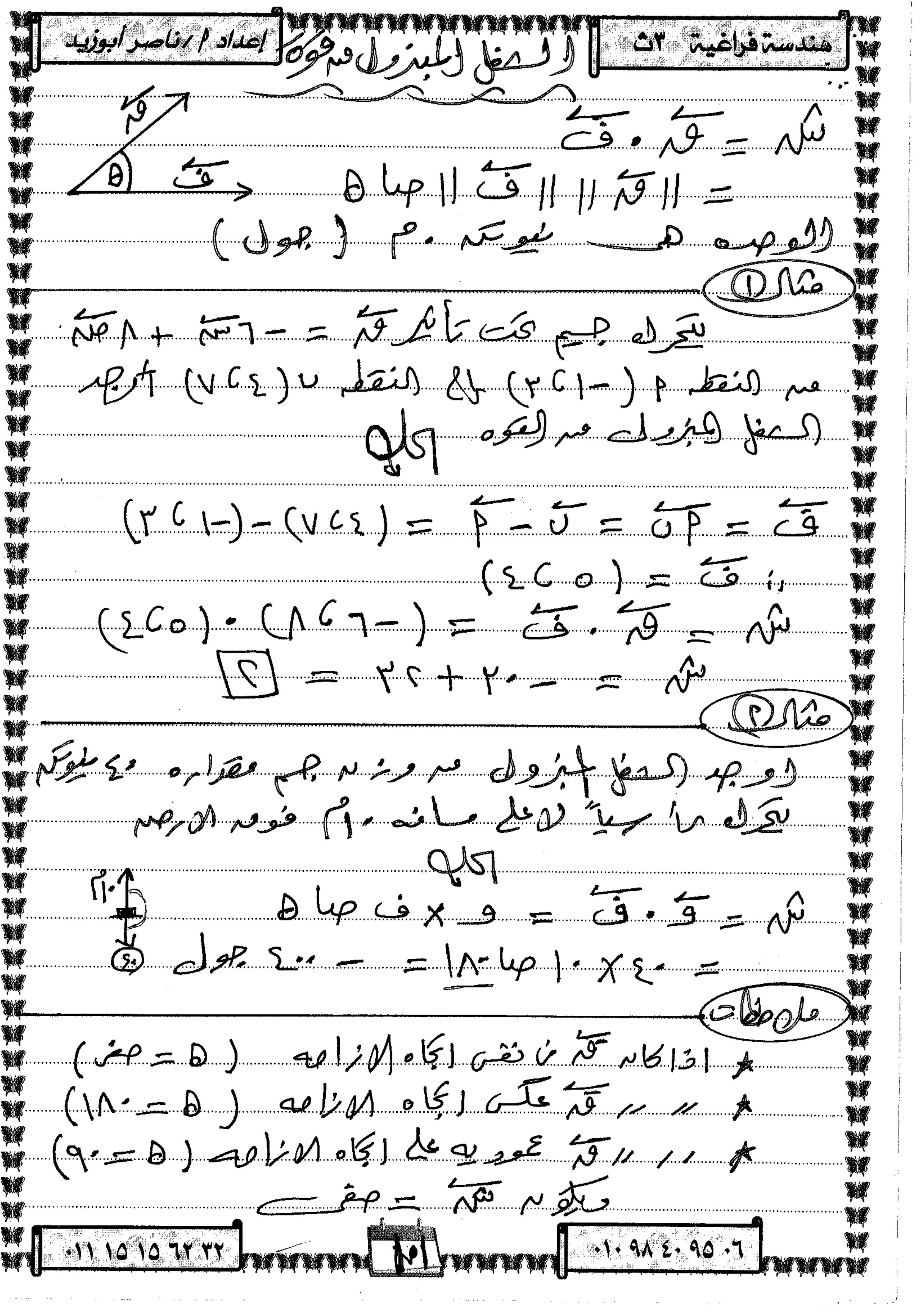
أوجد مسقط $\vec{وأ}$ على $\vec{جـب}$

الحل

* أ (٢ ، ٢ ، ٢) ، ب (٠ ، ٠ ، ٢)
* جـ (٢ ، ٢ ، ٠)
* $\vec{جـب}$ = $\vec{ب}$ − $\vec{جـ}$ = (−٢ ، −٢ ، ٢) * ||$\vec{جـب}$|| = ٢√٣
* $\vec{وأ}$ • $\vec{جـب}$ = (٢ ، ٢ ، ٢) • (−٢ ، −٢ ، ٢)

= −٤ − ٤ + ٤ = −٤

المسقط = ($\vec{وأ}$ • $\vec{جـب}$) / ||$\vec{جـب}$|| = −٤ / (٢√٣) = −٢√٣ / ٣



الشغل المبذول من قوة

إعداد م / ناصر أبوزيد

شغ = ق⃗ . ف⃗

= ||ق⃗|| ||ف⃗|| جتا θ

الوحدة هي نيوتن . م (جول)

مثال ①

يتحرك جسم تحت تأثير ق⃗ = −٦ س⃗ + ٨ ص⃗ من النقطة أ (−١ ، ٣) إلى النقطة ب (٤ ، ٧) أوجد الشغل المبذول من القوة

الحل

ف⃗ = أب⃗ = ب⃗ − أ⃗ = (٤ ، ٧) − (−١ ، ٣)

∴ ف⃗ = (٥ ، ٤)

شغ = ق⃗ . ف⃗ = (−٦ ، ٨) . (٥ ، ٤)

شغ = −٣٠ + ٣٢ = ٢

مثال ②

أوجد الشغل المبذول من وزن جسم مقداره ٤٠ نيوتن يتحرك رأسياً لأعلى مسافة ١٠ م فوق الأرض

الحل

شغ = و⃗ . ف⃗ = و × ف جتا θ

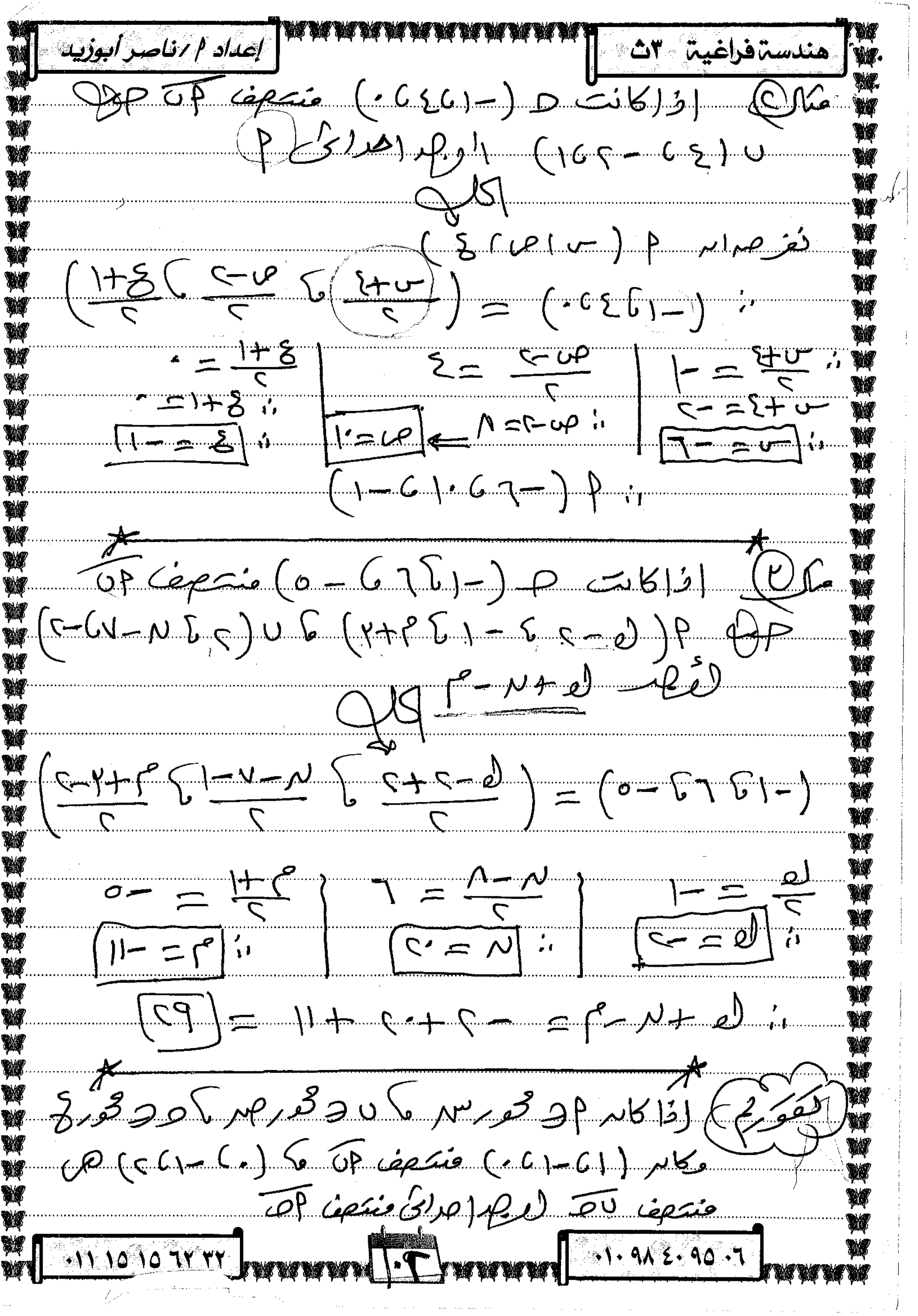
= ٤٠ × ١٠ جتا ١٨٠ = −٤٠٠ جول

ملاحظات

★ إذا كانت ق⃗ في نفس اتجاه الإزاحة (θ = صفر)

★ " " ق⃗ عكس اتجاه الإزاحة (θ = ١٨٠)

★ " " ق⃗ عمودية على اتجاه الإزاحة (θ = ٩٠) فيكون شغ = صفر



إعداد أ/ ناصر أبوزيد

مثال ⑥ إذا كانت د (−١، ٤، ٠) منتصف أب أوجد
ب (٤، −٢، ١) أوجد إحداثي أ

الحل

نفرض أن أ (س، ص، ع)

∴ $(-1, 4, 0) = \left(\frac{س+4}{2}, \frac{ص-2}{2}, \frac{ع+1}{2}\right)$

∴ $\frac{س+4}{2} = -1$ ، $س+4=-2$ ∴ $س=-6$

$\frac{ص-2}{2} = 4$ ، ∴ $ص-2=8$ ، $ص=10$

$\frac{ع+1}{2} = 0$ ، ∴ $ع+1=0$ ∴ $ع=-1$

∴ أ (−٦، ١٠، −١)

مثال ⑦ إذا كانت جـ (−١، ٦، −٥) منتصف أب
حيث أ (ل−٢، −١، م+٢) ، ب (٢، ن−٧، −٢)
أوجد ل + ن − م

الحل

$(-1, 6, -5) = \left(\frac{ل-2+2}{2}, \frac{ن-7-1}{2}, \frac{م+2-2}{2}\right)$

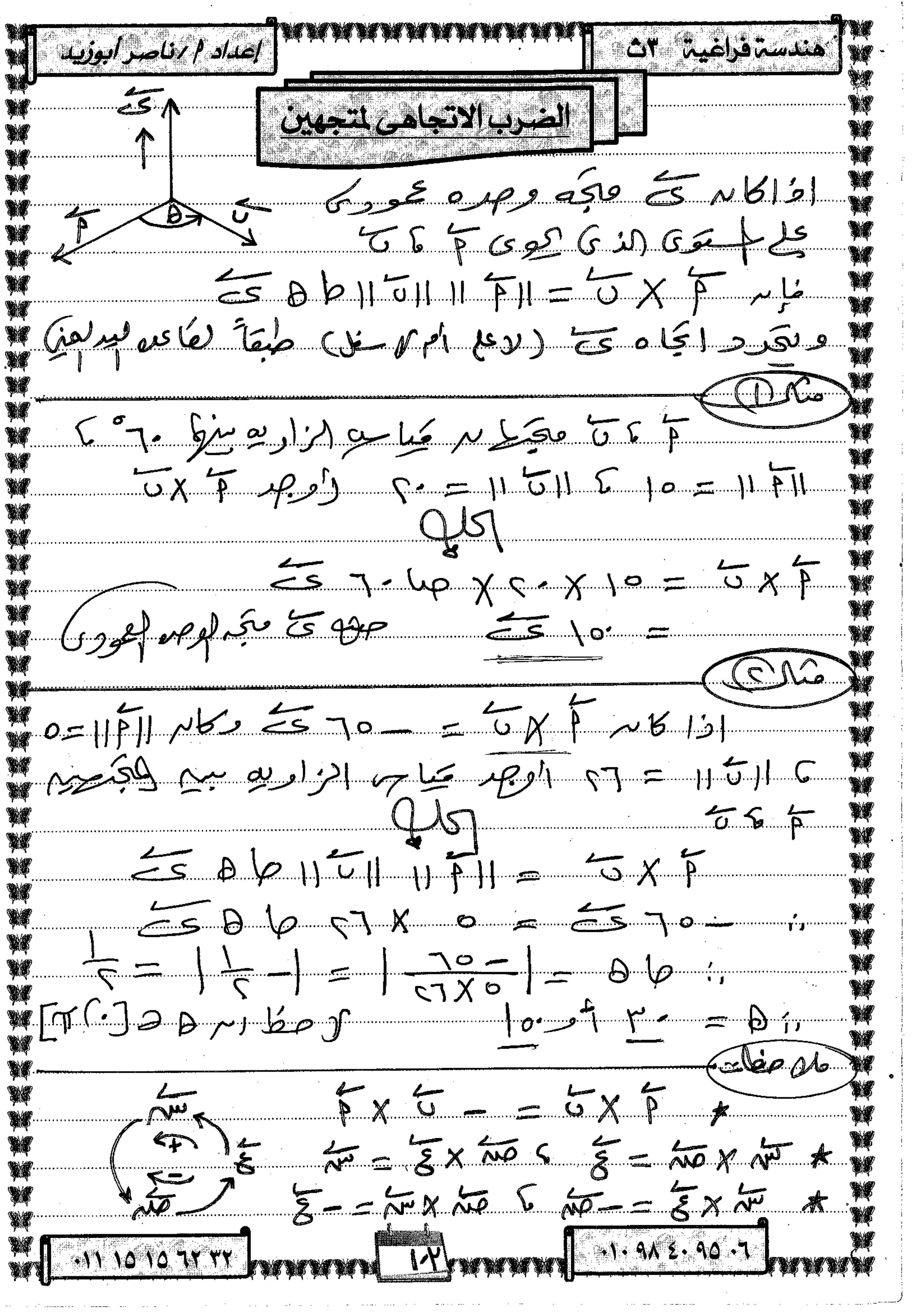
$\frac{ل}{2} = -1$ ∴ $ل=-2$

$\frac{ن-8}{2} = 6$ ∴ $ن=20$

$\frac{م+1}{2} = -5$ ∴ $م=-11$

∴ $ل+ن-م = -2 + 20 + 11 = 29$

التقويم: إذا كانت أ ∈ محور س ، ب ∈ محور ص ، د ∈ محور ع
وكانت (١، −١، ٠) منتصف أب ، (٠، −١، ٢) منتصف
منتصف ب د أوجد إحداثي منتصف أد



إعداد أ/ ناصر ابوزيد

الضرب الاتجاهي لمتجهين

إذا كان $\overleftarrow{ى}$ متجه وحدة عمودي على المستوى الذي يحوي $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$

فإن $\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب} = \|\overleftarrow{أ}\| \, \|\overleftarrow{ب}\|$ جا هـ $\overleftarrow{ى}$

ويتحدد اتجاه $\overleftarrow{ى}$ (لأعلى أم لأسفل) طبقاً لقاعدة اليد اليمنى

مثال ١

$\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ متجهان قياس الزاوية بينهما ٦٠° ، $\|\overleftarrow{أ}\| = ١٠$ ، $\|\overleftarrow{ب}\| = ٢٠$ أوجد $\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب}$

الحل

$\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب} = ١٠ \times ٢٠ \times$ جا ٦٠ $\overleftarrow{ى}$

$= ١٠٠ \, \overleftarrow{ى}$ (حيث $\overleftarrow{ى}$ متجه الوحدة العمودي)

مثال ٢

إذا كان $\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب} = -٦٥ \, \overleftarrow{ى}$ وكان $\|\overleftarrow{أ}\| = ٥$ ، $\|\overleftarrow{ب}\| = ٢٦$ أوجد قياس الزاوية بين المتجهين $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$

الحل

$\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب} = \|\overleftarrow{أ}\| \, \|\overleftarrow{ب}\|$ جا هـ $\overleftarrow{ى}$

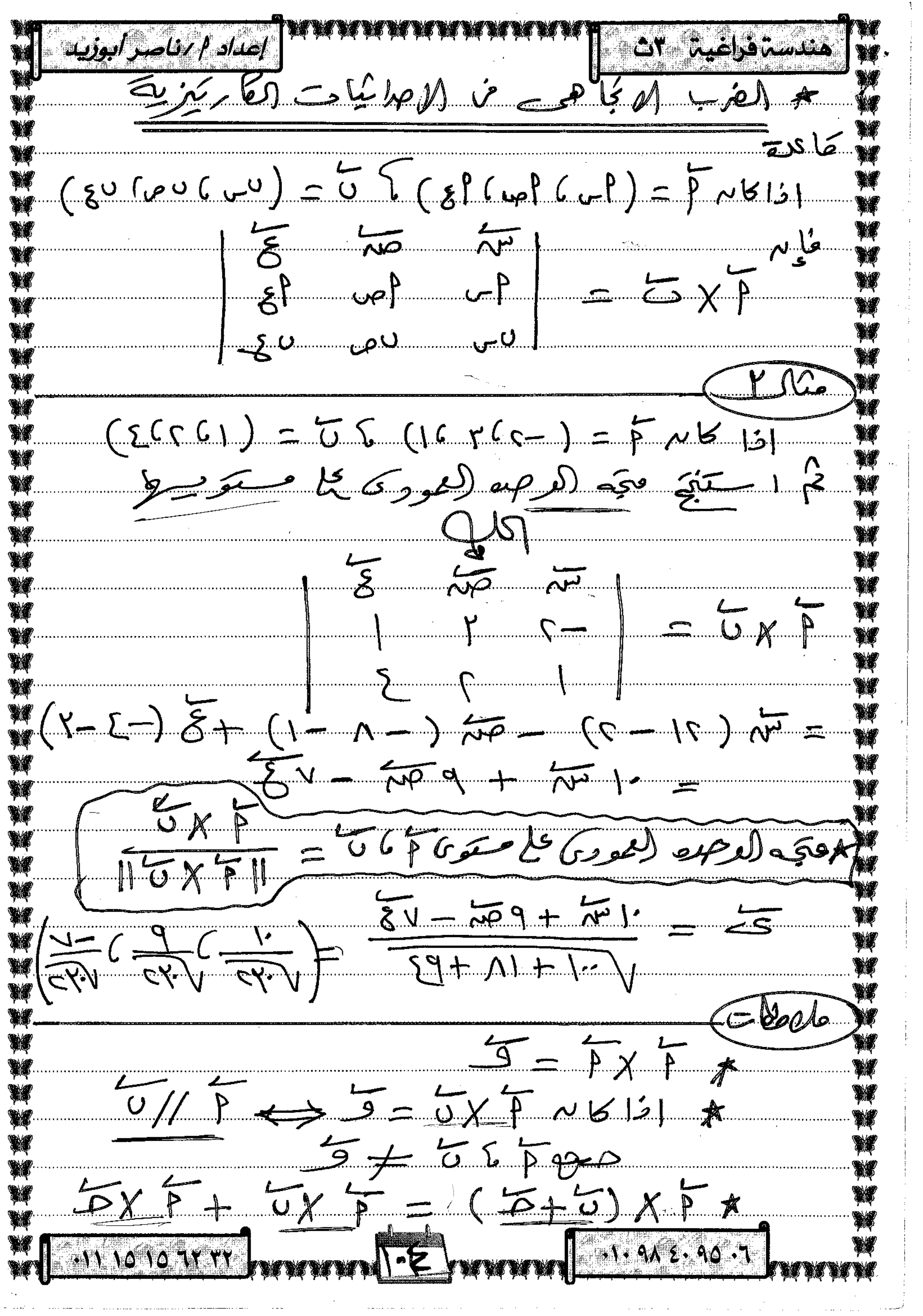
∴ $-٦٥ \, \overleftarrow{ى} = ٥ \times ٢٦$ جا هـ $\overleftarrow{ى}$

∴ جا هـ $= \left| \frac{-٦٥}{٥ \times ٢٦} \right| = \left| -\frac{١}{٢} \right| = \frac{١}{٢}$

∴ هـ $= ٣٠$ أو ١٥٠ حيث هـ $\in [٠ ، \pi]$

ملاحظات

* $\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب} = -\overleftarrow{ب} \times \overleftarrow{أ}$
* $\overleftarrow{س} \times \overleftarrow{ص} = \overleftarrow{ع}$ ، $\overleftarrow{ص} \times \overleftarrow{ع} = \overleftarrow{س}$
* $\overleftarrow{س} \times \overleftarrow{ع} = -\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ص} \times \overleftarrow{س} = -\overleftarrow{ع}$



★ الضرب الاتجاهي من الإحداثيات الكارتيزية

قاعدة

إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} = (\text{أ}_{\text{س}}، \text{أ}_{\text{ص}}، \text{أ}_{\text{ع}})$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = (\text{ب}_{\text{س}}، \text{ب}_{\text{ص}}، \text{ب}_{\text{ع}})$

فإن

$$\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ \text{أ}_{\text{س}} & \text{أ}_{\text{ص}} & \text{أ}_{\text{ع}} \\ \text{ب}_{\text{س}} & \text{ب}_{\text{ص}} & \text{ب}_{\text{ع}} \end{vmatrix}$$

مثال ٢

إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} = (-٢، ٣، ١)$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = (١، ٢، ٤)$

ثم أوجد متجه الوحدة العمودي على مستويهما

الحل

$$\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ -٢ & ٣ & ١ \\ ١ & ٢ & ٤ \end{vmatrix}$$

$$= \overrightarrow{\text{س}}(١٢ - ٢) - \overrightarrow{\text{ص}}(-٨ - ١) + \overrightarrow{\text{ع}}(-٤ - ٣)$$

$$= ١٠\overrightarrow{\text{س}} + ٩\overrightarrow{\text{ص}} - ٧\overrightarrow{\text{ع}}$$

★ متجه الوحدة العمودي على مستوى $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ $= \dfrac{\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}}{\|\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}\|}$

$$\overrightarrow{\text{ى}} = \frac{١٠\overrightarrow{\text{س}} + ٩\overrightarrow{\text{ص}} - ٧\overrightarrow{\text{ع}}}{\sqrt{١٠٠ + ٨١ + ٤٩}} = \left(\frac{١٠}{\sqrt{٢٣٠}}، \frac{٩}{\sqrt{٢٣٠}}، \frac{-٧}{\sqrt{٢٣٠}}\right)$$

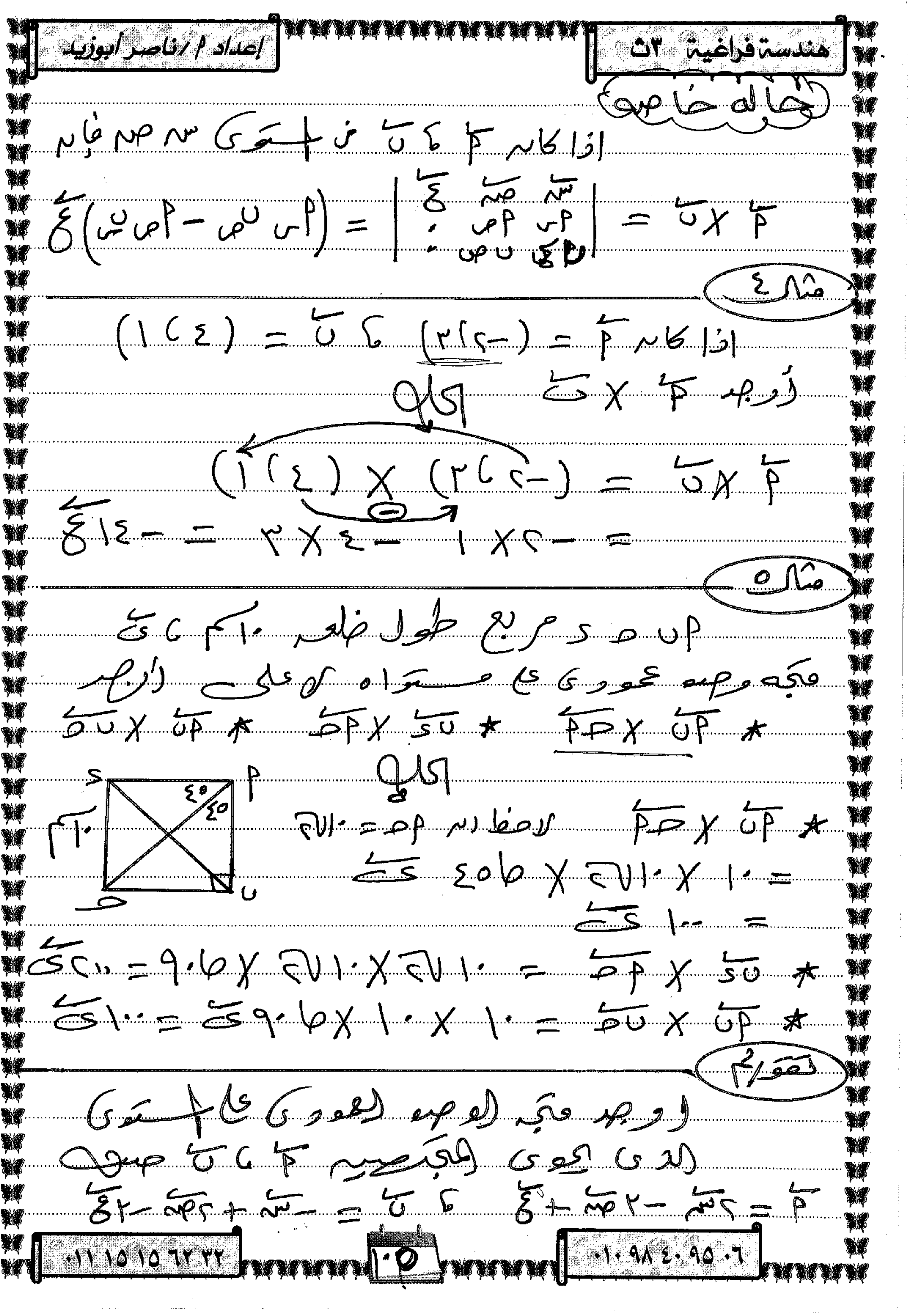
ملاحظات

★ $\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{أ}} = \overrightarrow{\text{و}}$

★ إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{و}} \iff \overrightarrow{\text{أ}} \parallel \overrightarrow{\text{ب}}$

حيث $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} \neq \overrightarrow{\text{و}}$

★ $\overrightarrow{\text{أ}} \times (\overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{ح}}) = \overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ح}}$



حالة خاصة

إذا كان $\overline{أ}$ ، $\overline{ب}$ في مستوى س ص فإن

$$\overline{أ} \times \overline{ب} = \begin{vmatrix} \overline{س} & \overline{ص} & \overline{ع} \\ أ_س & أ_ص & 0 \\ ب_س & ب_ص & 0 \end{vmatrix} = (أ_س ب_ص - أ_ص ب_س)\overline{ع}$$

مثال ٤

إذا كان $\overline{أ} = (-٢ ، ٣)$ ، $\overline{ب} = (٤ ، ١)$

أوجد $\overline{أ} \times \overline{ب}$

الحل

$\overline{أ} \times \overline{ب} = (-٢ ، ٣) \times (٤ ، ١)$

$= -٢ \times ١ - ٤ \times ٣ = -١٤ \overline{ع}$

مثال ٥

أ ب جـ د مربع طول ضلعه ١٠ سم ، $\overline{ى}$ متجه وحدة عمودي على مستواه أوجد

* $\overline{أب} \times \overline{أجـ}$ * $\overline{بد} \times \overline{جـأ}$ * $\overline{أب} \times \overline{بجـ}$

الحل

* $\overline{أب} \times \overline{أجـ}$ لاحظ أن أجـ = $١٠\sqrt{٢}$

$= ١٠ \times ١٠\sqrt{٢} \times جا ٤٥ \overline{ى}$

$= ١٠٠ \overline{ى}$

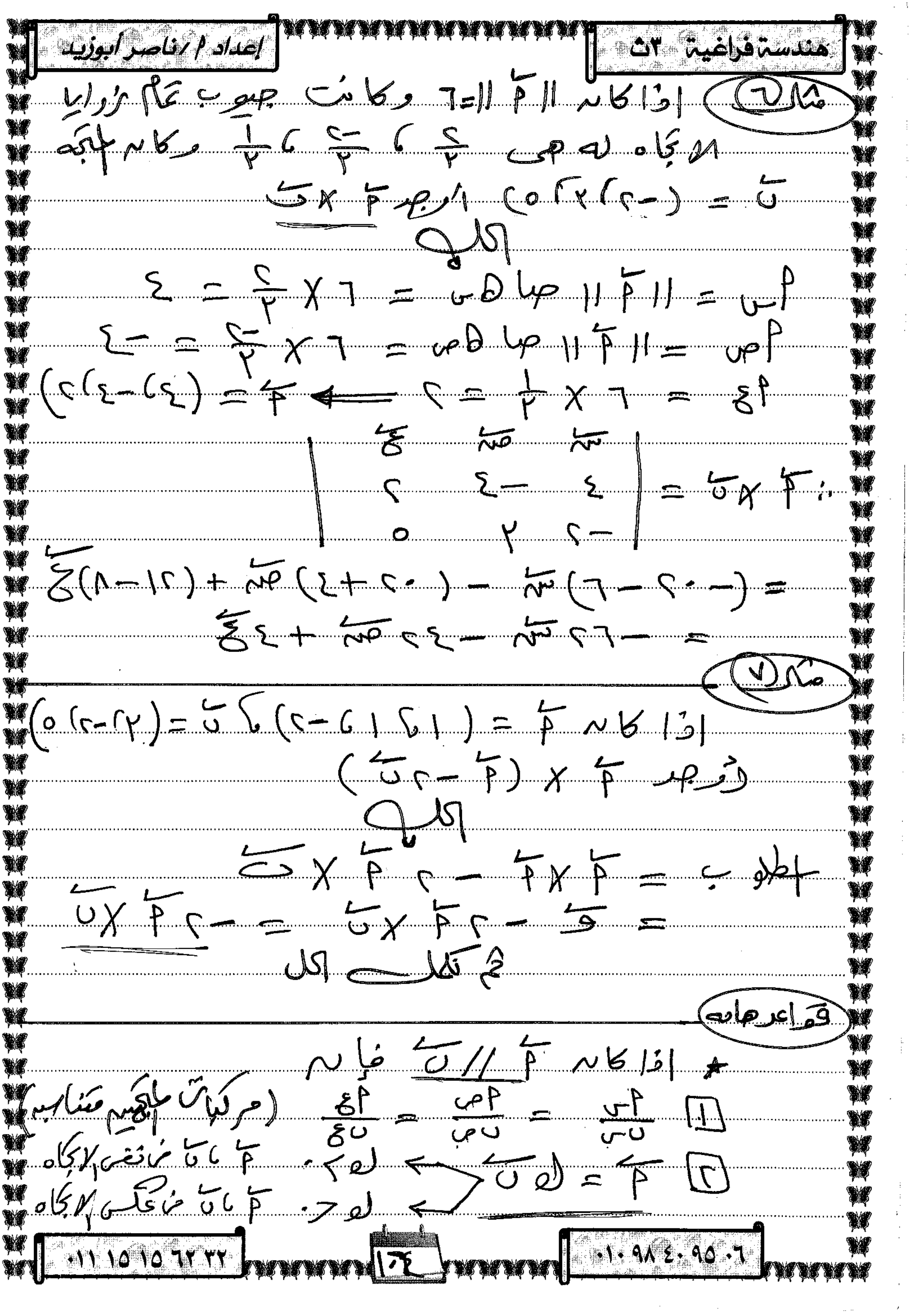
* $\overline{بد} \times \overline{جـأ} = ١٠\sqrt{٢} \times ١٠\sqrt{٢} \times جا ٩٠ = ٢٠٠ \overline{ى}$

* $\overline{أب} \times \overline{بجـ} = ١٠ \times ١٠ \times جا ٩٠ \overline{ى} = ١٠٠ \overline{ى}$

تقويم

أوجد متجه الوحدة العمودي على المستوى الذي يحوي المتجهين $\overline{أ}$ ، $\overline{ب}$ حيث

$\overline{أ} = ٢\overline{س} - ٢\overline{ص} + \overline{ع}$ ، $\overline{ب} = \overline{س} + ٢\overline{ص} - ٢\overline{ع}$



مثال ٦ إذا كان ||أ|| = ٦ وكانت جيوب تمام زوايا الاتجاه له هي $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{-٢}{٣}$ ، $\frac{١}{٣}$ وكان المتجه ب = (-٢، ٢، ٥) أوجد أ × ب

الحل

أس = ||أ|| جتا هـس = ٦ × $\frac{٢}{٣}$ = ٤

أص = ||أ|| جتا هـص = ٦ × $\frac{-٢}{٣}$ = -٤

أع = ٦ × $\frac{١}{٣}$ = ٢ ⟸ أ = (٤، -٤، ٢)

∴ أ × ب =
$$\begin{vmatrix} س & ص & ع \\ ٤ & -٤ & ٢ \\ -٢ & ٢ & ٥ \end{vmatrix}$$

= (-٢٠ - ٦) س - (٢٠ + ٤) ص + (١٢ - ٨) ع

= -٢٦ س - ٢٤ ص + ٤ ع

مثال ٧ إذا كان أ = (١، ١، -٢)، ب = (٢، -٣، ٥)

أوجد أ × (أ - ٢ب)

الحل

المطلوب = أ × أ - ٢ أ × ب

= ٠ - ٢ أ × ب = -٢ أ × ب

ثم نكمل الحل

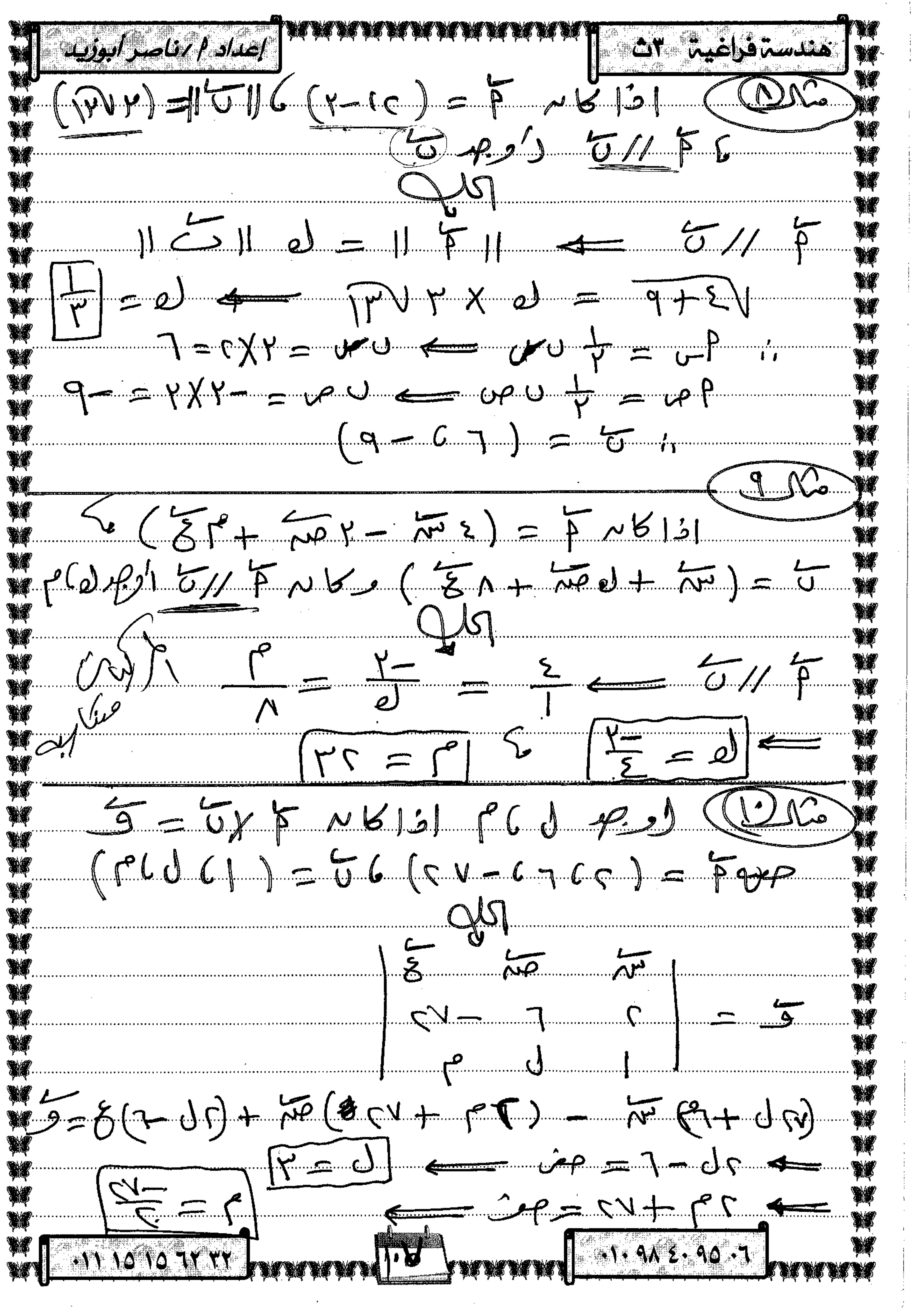
قواعد هامة

* إذا كان أ // ب فإن

[١] $\frac{أس}{بس} = \frac{أص}{بص} = \frac{أع}{بع}$ (مركبات المتجهين متناسبة)

[٢] أ = ك ب ← ك > ٠ : أ ، ب في نفس الاتجاه

← ك < ٠ : أ ، ب في عكس الاتجاه



مثال (٨) إذا كان $\overrightarrow{أ} = (٢ ، -٣)$ ، $\|\overrightarrow{ب}\| = ٣\sqrt{١٣}$

، $\overrightarrow{أ} \parallel \overrightarrow{ب}$ أوجد $\overrightarrow{ب}$

الحل

$\overrightarrow{أ} \parallel \overrightarrow{ب} \Leftarrow \|\overrightarrow{أ}\| = ك \|\overrightarrow{ب}\|$

$\sqrt{٤+٩} = ك \times ٣\sqrt{١٣} \Leftarrow ك = \frac{١}{٣}$

$\therefore أ_س = \frac{١}{٣} ب_س \Leftarrow ب_س = ٢ \times ٣ = ٦$

$أ_ص = \frac{١}{٣} ب_ص \Leftarrow ب_ص = -٣ \times ٣ = -٩$

$\therefore \overrightarrow{ب} = (٦ ، -٩)$

مثال ٩

إذا كان $\overrightarrow{أ} = (٤ \overrightarrow{س} - ٢ \overrightarrow{ص} + م \overrightarrow{ع})$ ،

$\overrightarrow{ب} = (\overrightarrow{س} + ك \overrightarrow{ص} + ٨ \overrightarrow{ع})$ وكان $\overrightarrow{أ} \parallel \overrightarrow{ب}$ أوجد ك ، م

الحل

$\overrightarrow{أ} \parallel \overrightarrow{ب} \Leftarrow \frac{٤}{١} = \frac{-٢}{ك} = \frac{م}{٨}$ (مركبات متناظرة)

$\Leftarrow ك = \frac{-٢}{٤}$ ، $م = ٣٢$

مثال (١٠) أوجد ل ، م إذا كان $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{و}$

حيث $\overrightarrow{أ} = (٢ ، ٦ ، -٢٧)$ ، $\overrightarrow{ب} = (١ ، ل ، م)$

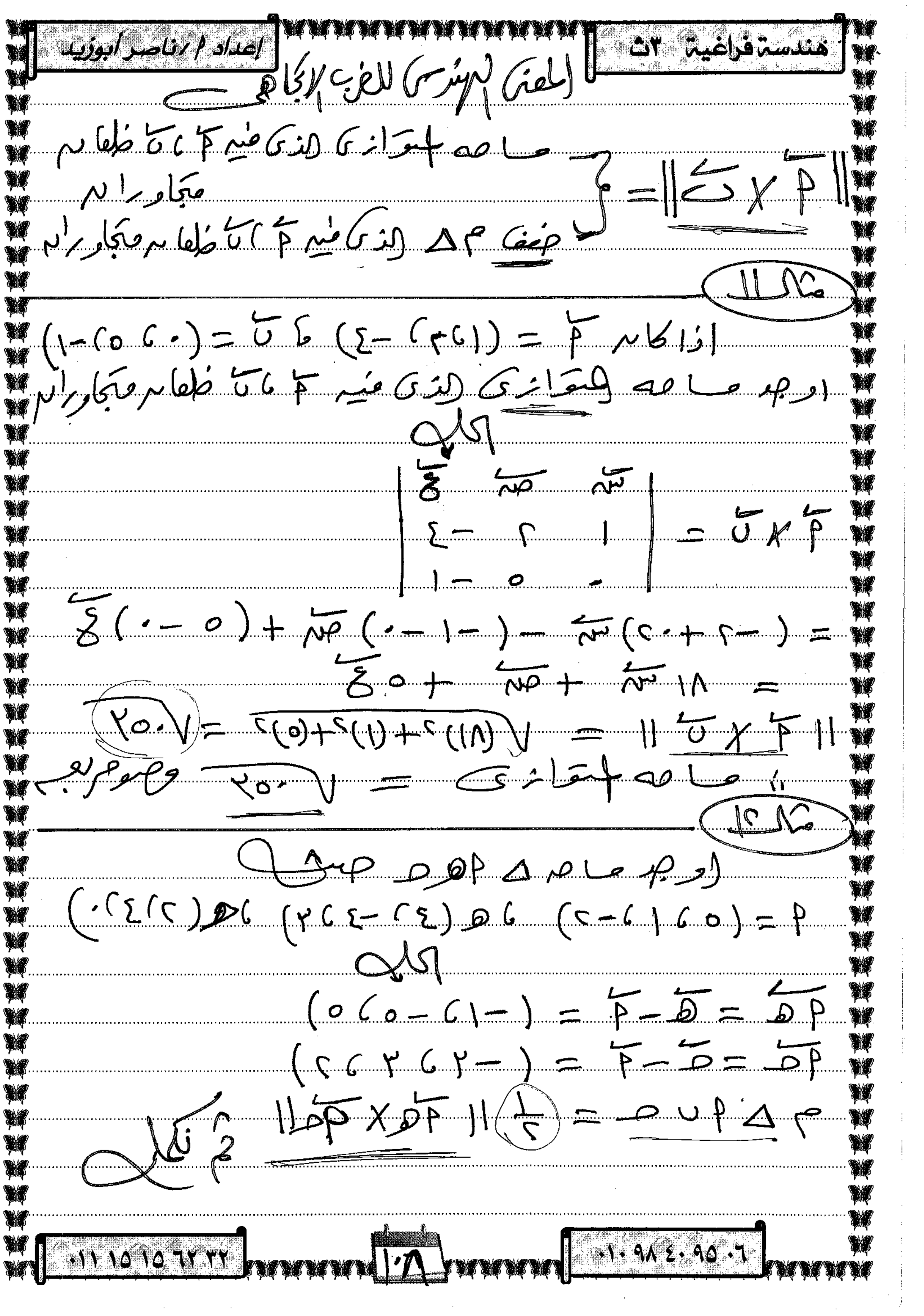
الحل

$$\overrightarrow{و} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ٢ & ٦ & -٢٧ \\ ١ & ل & م \end{vmatrix}$$

$(٢٧ل + ٦م)\overrightarrow{س} - (٢م + ٢٧)\overrightarrow{ص} + (٢ل - ٦)\overrightarrow{ع} = \overrightarrow{و}$

$\Leftarrow ٢ل - ٦ = صفر \Leftarrow ل = ٣$

$\Leftarrow ٢م + ٢٧ = صفر \Leftarrow م = \frac{-٢٧}{٢}$



المعنى الهندسي للضرب الاتجاهي

$\| \overline{أ} \times \overline{ب} \|$ = مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه $\overline{أ}$ ، $\overline{ب}$ ضلعان متجاوران

= ضعف م △ الذي فيه $\overline{أ}$ ، $\overline{ب}$ ضلعان متجاوران

مثال ١

إذا كان $\overline{أ} = (١ ، ٢ ، -٤)$ ، $\overline{ب} = (٠ ، ٥ ، -١)$

أوجد مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه $\overline{أ}$ ، $\overline{ب}$ ضلعان متجاوران

الحل

$$\overline{أ} \times \overline{ب} = \begin{vmatrix} \overline{س} & \overline{ص} & \overline{ع} \\ ١ & ٢ & -٤ \\ ٠ & ٥ & -١ \end{vmatrix}$$

$= (-٢ + ٢٠)\overline{س} - (-١ - ٠)\overline{ص} + (٥ - ٠)\overline{ع}$

$= ١٨\overline{س} + \overline{ص} + ٥\overline{ع}$

$\| \overline{أ} \times \overline{ب} \| = \sqrt{(١٨)^٢ + (١)^٢ + (٥)^٢} = \sqrt{٣٥٠}$

∴ مساحة متوازي الأضلاع $= \sqrt{٣٥٠}$ وحدة مربعة

مثال ٢

أوجد مساحة △ أ ب ج حيث

أ = (٥ ، ١ ، -٢) ، ب (٤ ، -٤ ، ٣) ، ج (٢ ، ٤ ، ٠)

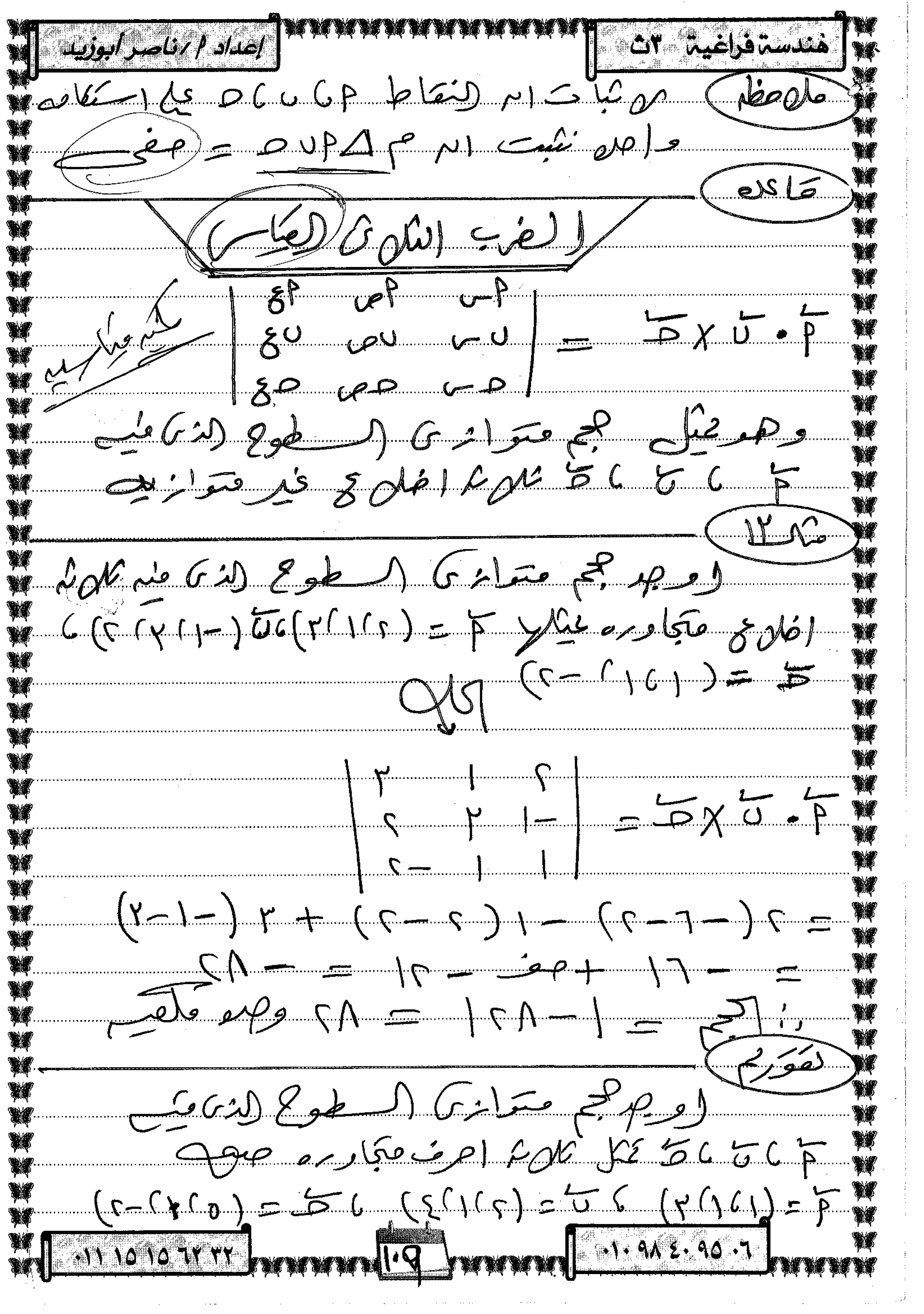
الحل

$\overline{أب} = \overline{ب} - \overline{أ} = (-١ ، -٥ ، ٥)$

$\overline{أج} = \overline{ج} - \overline{أ} = (-٣ ، ٣ ، ٢)$

م △ أ ب ج $= \frac{١}{٢} \| \overline{أب} \times \overline{أج} \|$

ثم نكمل



ملاحظة: من ثبات ان النقاط أ، ب، ج، د على استقامة واحدة نثبت ان م Δ أ ب د = صفر

قاعدة

الضرب الثلاثي القياسي

$$\vec{أ} \cdot \vec{ب} \times \vec{ج} = \begin{vmatrix} أ_س & أ_ص & أ_ع \\ ب_س & ب_ص & ب_ع \\ ج_س & ج_ص & ج_ع \end{vmatrix}$$

(كمية عددية)

وهو يمثل حجم متوازي السطوح الذي فيه $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$ ، $\vec{ج}$ تمثل أضلاع غير متوازية

مثال ١٢

أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه ثلاثة أضلاع متجاورة تمثلها $\vec{أ}$ = (٢، ١، ٣)، $\vec{ب}$ = (−١، ٢، ٢)، $\vec{ج}$ = (١، ١، −٢)

الحل

$$\vec{أ} \cdot \vec{ب} \times \vec{ج} = \begin{vmatrix} ٢ & ١ & ٣ \\ −١ & ٢ & ٢ \\ ١ & ١ & −٢ \end{vmatrix}$$

= ٢(−٦ − ٢) − ١(٢ − ٢) + ٣(−١ − ٢)

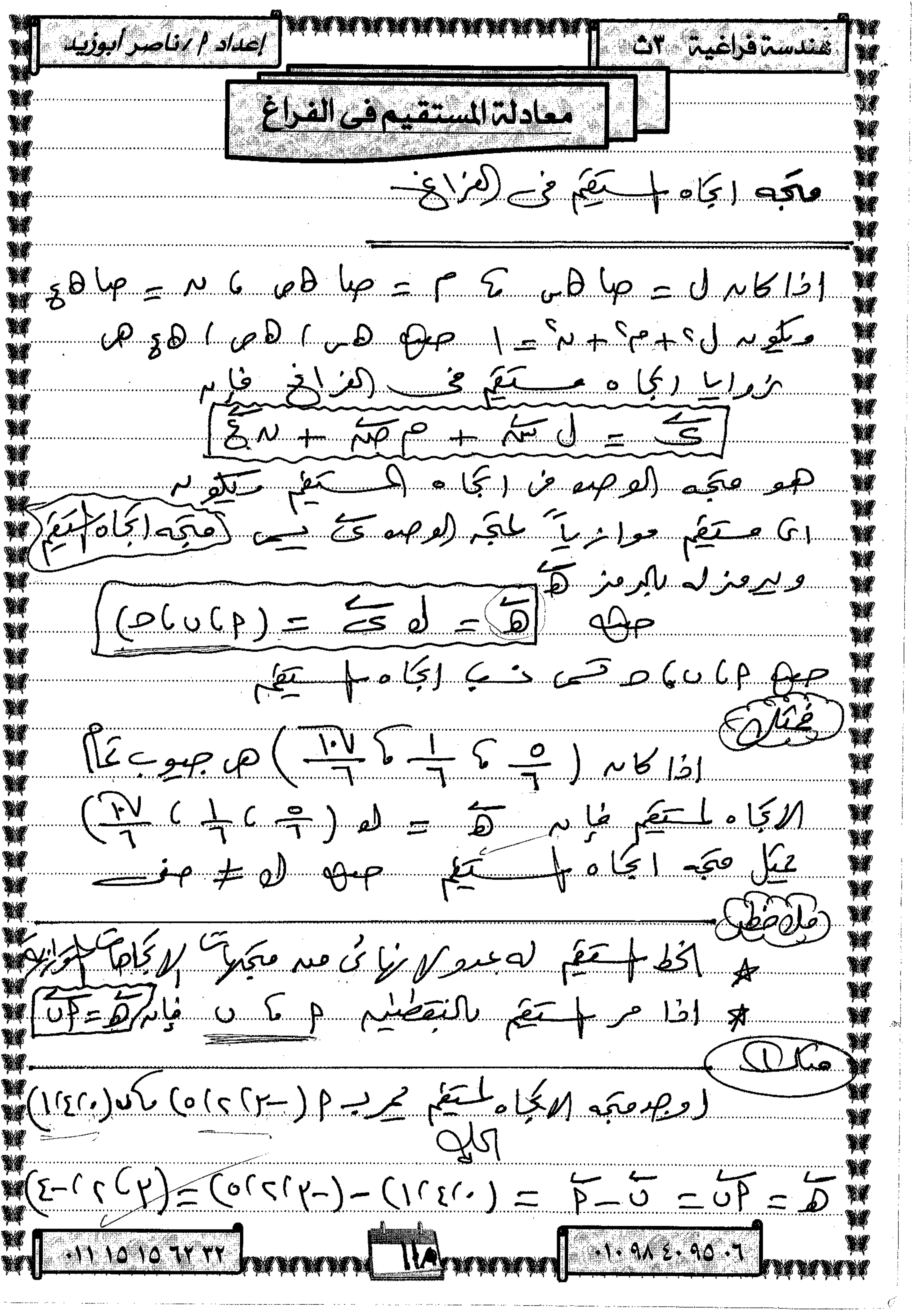
= −١٦ + صفر − ١٢ = −٢٨

∴ الحجم = |−٢٨| = ٢٨ وحدة مكعبة

تمرين

أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$ ، $\vec{ج}$ تمثل ثلاثة أحرف متجاورة منه

$\vec{أ}$ = (١، ١، ٣) ، $\vec{ب}$ = (٢، ١، ٤) ، $\vec{ج}$ = (٥، ٢، −٢)



معادلة المستقيم فى الفراغ

متجه اتجاه المستقيم في الفراغ

إذا كان $ل = جتا θ_س$ ، $م = جتا θ_ص$ ، $ن = جتا θ_ع$

ويكون $ل^2 + م^2 + ن^2 = 1$ حيث $θ_س ، θ_ص ، θ_ع$ هي زوايا اتجاه مستقيم في الفراغ فإن

$$\vec{ى} = ل\,\vec{س} + م\,\vec{ص} + ن\,\vec{ع}$$

هو متجه الوحدة في اتجاه المستقيم ويكون أي مستقيم موازياً لمتجه الوحدة ى يسمى (متجه اتجاه المستقيم) ويرمز له بالرمز $\vec{ه}$

$$\vec{ه} = ك\,\vec{ى} = (أ ، ب ، جـ)$$ حيث

حيث أ ، ب ، جـ تسمى نسب اتجاه المستقيم

مثال

إذا كان $\left(\frac{5}{6} ، \frac{1}{6} ، \frac{17}{6}\right)$ هي جيوب تمام الاتجاه لمستقيم فإن $\vec{ه} = ك \left(\frac{5}{6} ، \frac{1}{6} ، \frac{17}{6}\right)$

تمثل متجه اتجاه المستقيم حيث $ك \neq$ صفر

ملاحظة

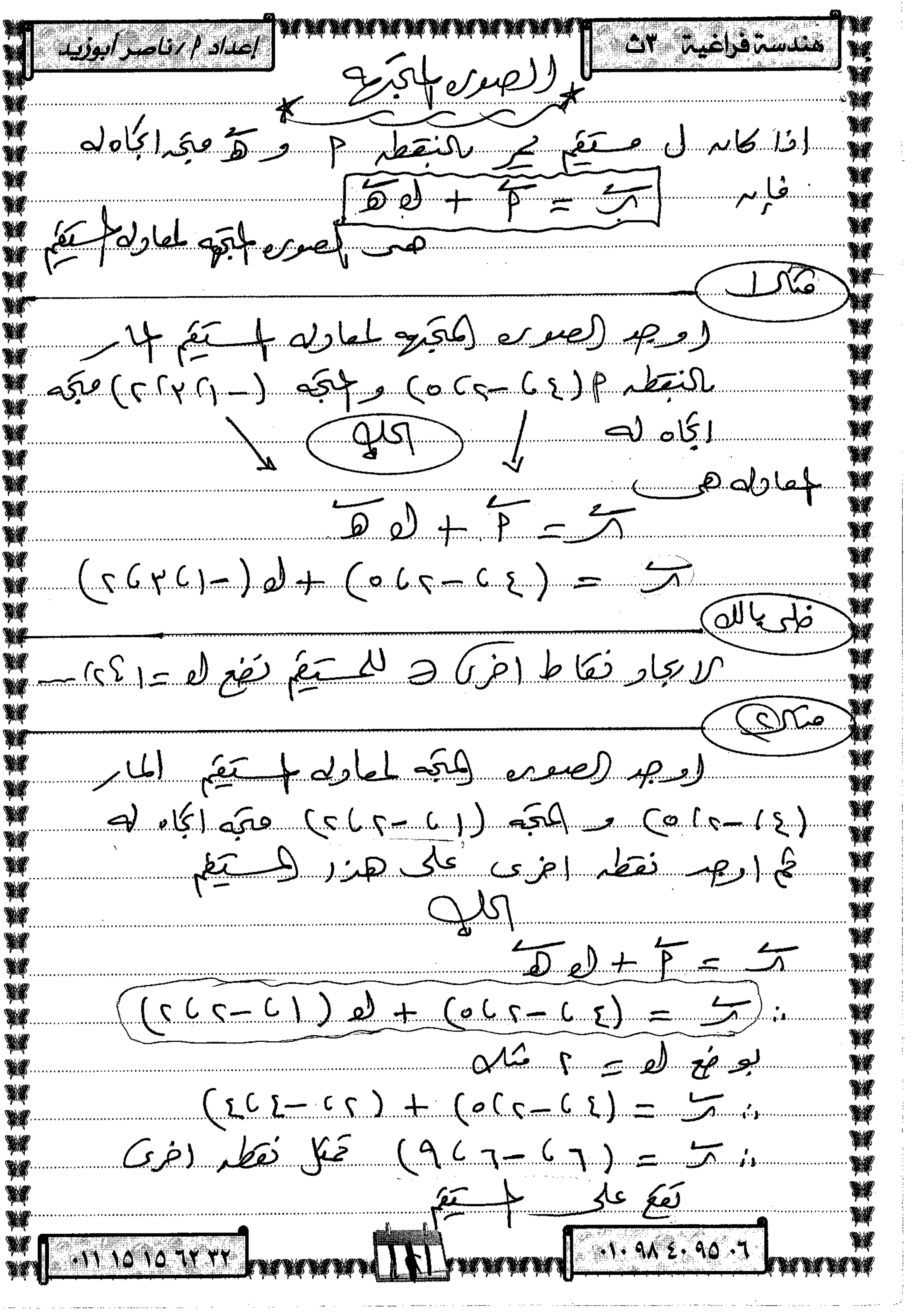
* الخط المستقيم له عدد لا نهائي من متجهات الاتجاه المتوازية
* إذا مر مستقيم بالنقطتين أ ، ب فإن $\vec{ه} = \overrightarrow{أب}$

مثال (١)

أوجد متجه الاتجاه لمستقيم يمر بـ أ (−٣ ، ٢ ، ٥) ، ب (٠ ، ٤ ، ١)

الحل

$\vec{ه} = \overrightarrow{أب} = \vec{ب} - \vec{أ} = (٠ ، ٤ ، ١) - (−٣ ، ٢ ، ٥) = (٣ ، ٢ ، −٤)$



إعداد م/ ناصر ابوزيد

* الصورة المتجهة *

إذا كان ل مستقيم يمر بالنقطة أ و $\overrightarrow{ى}$ متجه اتجاه له

فإن $\overrightarrow{ر} = \overrightarrow{أ} + ك\,\overrightarrow{ى}$

هي الصورة المتجهة لمعادلة المستقيم

مثال ١

اوجد الصورة المتجهة لمعادلة المستقيم المار بالنقطة أ(٤، -٢، ٥) والمتجه (-١، ٣، ٢) متجه اتجاه له

الحل

المعادلة هي

$\overrightarrow{ر} = \overrightarrow{أ} + ك\,\overrightarrow{ى}$

$\overrightarrow{ر}$ = (٤، -٢، ٥) + ك (-١، ٣، ٢)

ملاحظة

لإيجاد نقاط أخرى للمستقيم نضع ك = ١، ٢، ...

مثال ٢

اوجد الصورة المتجهة لمعادلة المستقيم المار (٤، -٢، ٥) والمتجه (١، -٢، ٢) متجه اتجاه له ثم اوجد نقطة أخرى على هذا المستقيم

الحل

$\overrightarrow{ر} = \overrightarrow{أ} + ك\,\overrightarrow{ى}$

∴ $\overrightarrow{ر}$ = (٤، -٢، ٥) + ك (١، -٢، ٢)

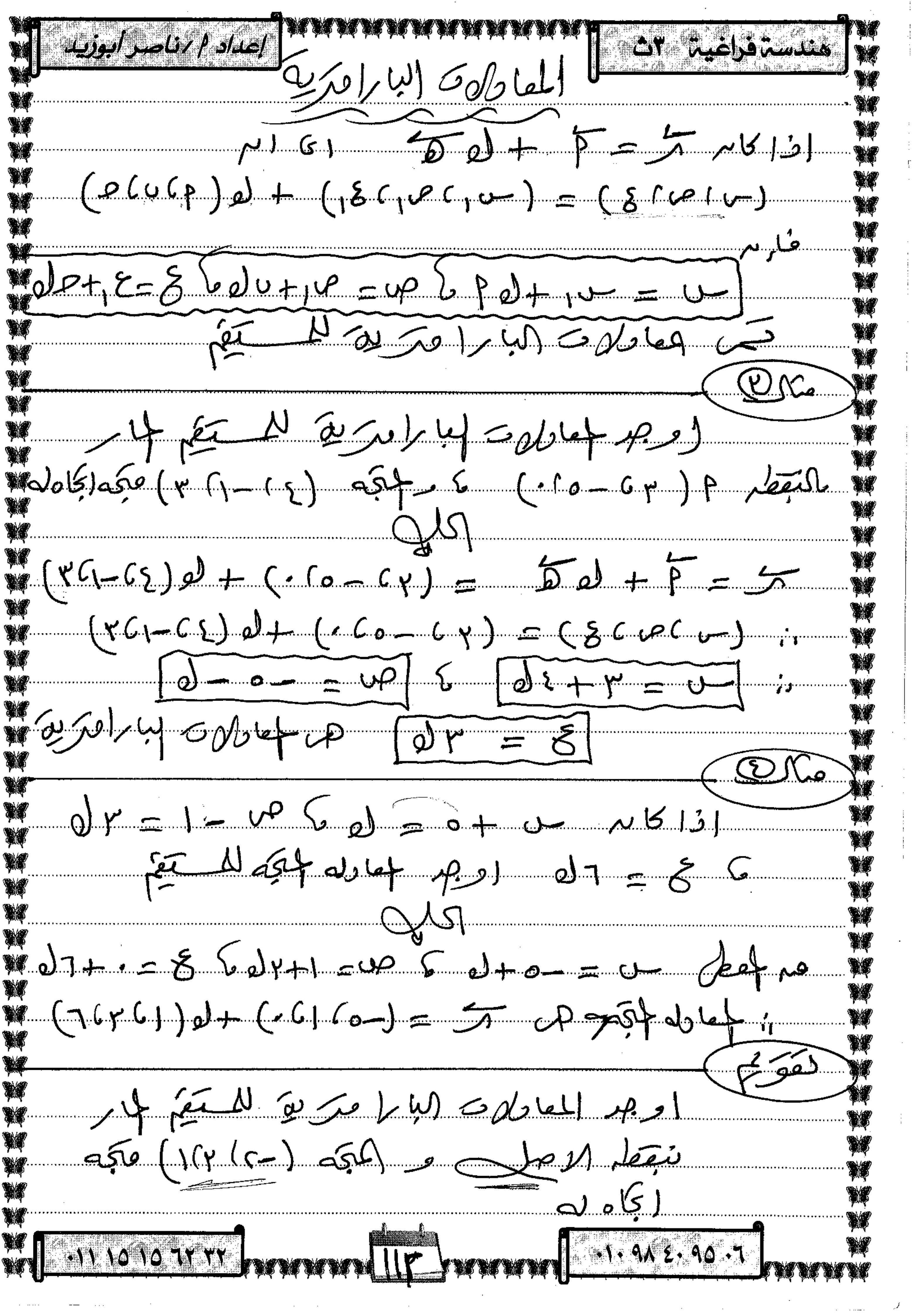
بوضع ك = ٢ مثلاً

∴ $\overrightarrow{ر}$ = (٤، -٢، ٥) + (٢، -٤، ٤)

∴ $\overrightarrow{ر}$ = (٦، -٦، ٩) تمثل نقطة أخرى تقع على المستقيم

٠١١١٥١٥٦٢٣٢

٠١٠٩٨٤٠٩٥٠٦



المعادلات البارامترية

إذا كان $\vec{ر} = \vec{أ} + ك\,\vec{ى}$ ، ك ∈ ح

(س، ص، ع) = (س₁، ص₁، ع₁) + ك (ل، م، ن)

فإن

س = س₁ + ك ل ، ص = ص₁ + ك م ، ع = ع₁ + ك ن

تسمى معادلات البارامترية للمستقيم

مثال (٣)

أوجد المعادلات البارامترية للمستقيم المار بالنقطة أ (٢، -٥، ٠) ، ومتجه (٤، -١، ٣) متجه اتجاه له

الحل

$\vec{ر} = \vec{أ} + ك\,\vec{ى}$ = (٢، -٥، ٠) + ك (٤، -١، ٣)

∴ (س، ص، ع) = (٢، -٥، ٠) + ك (٤، -١، ٣)

∴ س = ٣ + ٤ك ، ص = -٥ - ك

ع = ٣ك هي المعادلات البارامترية

مثال (٤)

إذا كان س + ٥ = ك ، ص - ١ = ٢ك ، ع = ٦ك أوجد معادلة المتجه للمستقيم

الحل

من المعطى س = -٥ + ك ، ص = ١ + ٢ك ، ع = ٠ + ٦ك

∴ المعادلة المتجهة هي $\vec{ر}$ = (-٥، ١، ٠) + ك (١، ٢، ٦)

تقويم

أوجد المعادلات البارامترية للمستقيم المار بنقطة الأصل ، والمتجه (-٢، ٢، ١) متجه اتجاه له



المعادلة الإحداثية

من المعادلات البارامترية

$$\frac{\text{س} - \text{س}_1}{\text{أ}} = \frac{\text{ص} - \text{ص}_1}{\text{ب}} = \frac{\text{ع} - \text{ع}_1}{\text{جـ}}$$

وهي المعادلة الإحداثية

لاحظ أن أ، ب، جـ $\neq$ صفر

* حيث أن أ، ب، جـ تتناسب مع جيوب تمام الاتجاه ل، م، ن فإن المعادلة هي

$$\frac{\text{س} - \text{س}_1}{\text{ل}} = \frac{\text{ص} - \text{ص}_1}{\text{م}} = \frac{\text{ع} - \text{ع}_1}{\text{ن}}$$

مثال

أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم المار بالنقطتين (٢، −٢، ٥)، (١، −١، ٣)

الحل

* المتجهة: نوجد $\overline{\text{هـ}}$ أولاً

$\overline{\text{هـ}}$ = (١، −١، ٣) − (٢، −٢، ٥) = (−١، ١، −٢)

المعادلة هي $\overline{\text{ر}} = \overline{\text{أ}} + \text{ك}\,\overline{\text{هـ}}$

$\overline{\text{ر}}$ = (٢، −٢، ٥) + ك (−١، ١، −٢)

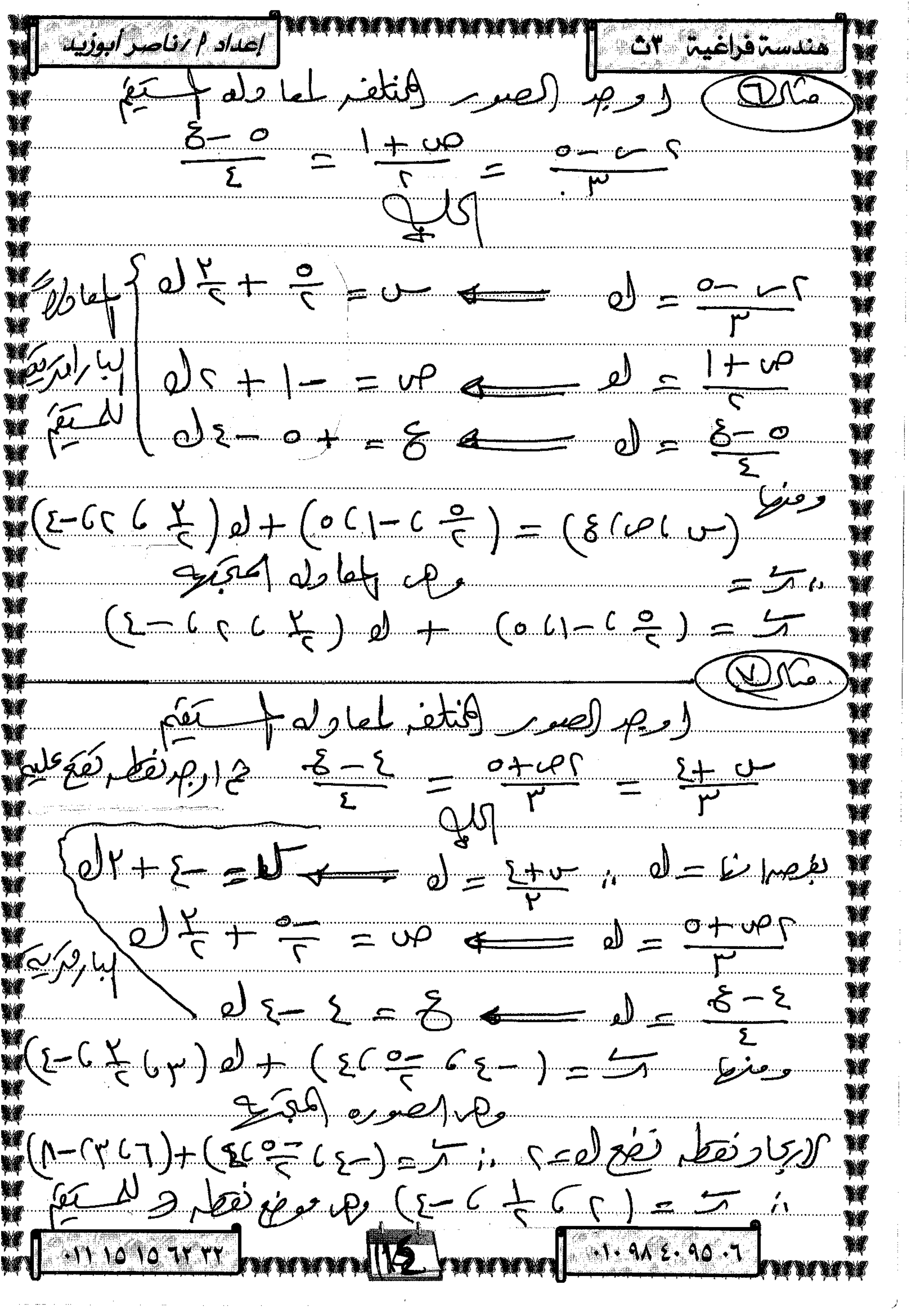
* البارامترية: س = ٢ − ك ، ص = −٢ + ك ، ع = ٥ − ٢ك

* الإحداثية:

$$\frac{\text{س} - ٢}{-١} = \frac{\text{ص} + ٢}{١} = \frac{\text{ع} - ٥}{-٢}$$

تقويم

أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم المار بالنقطتين (٢، ٥، ٠)، (−١، ٢، ٣)



مثال (٦) اوجد الصورة المتجهة لمعادلة المستقيم

$$\frac{٢س - ٥}{٣} = \frac{ص + ١}{٢} = \frac{٥ - ع}{٤}$$

الحل

$\frac{٢س-٥}{٣} = ل \Leftarrow س = \frac{٥}{٢} + \frac{٣}{٢}ل$

$\frac{ص+١}{٢} = ل \Leftarrow ص = -١ + ٢ل$

$\frac{٥-ع}{٤} = ل \Leftarrow ع = ٥ - ٤ل$

المعادلات البارامترية للمستقيم

ومنها (س، ص، ع) = (٥/٢ ، −١ ، ٥) + ل (٣/٢ ، ٢ ، −٤)

∴ ر = ومنها المعادلة المتجهة

ر = (٥/٢ ، −١ ، ٥) + ل (٣/٢ ، ٢ ، −٤)

مثال (٧)

اوجد الصورة المتجهة لمعادلة المستقيم

$$\frac{س + ٤}{٣} = \frac{٢ص + ٥}{٣} = \frac{٤ - ع}{٤}$$ ثم اوجد نقطة تقع عليه

الحل

بفرض ان = ل ∴ $\frac{س+٤}{٣} = ل \Leftarrow س = -٤ + ٣ل$

$\frac{٢ص+٥}{٣} = ل \Leftarrow ص = -\frac{٥}{٢} + \frac{٣}{٢}ل$

$\frac{٤-ع}{٤} = ل \Leftarrow ع = ٤ - ٤ل$

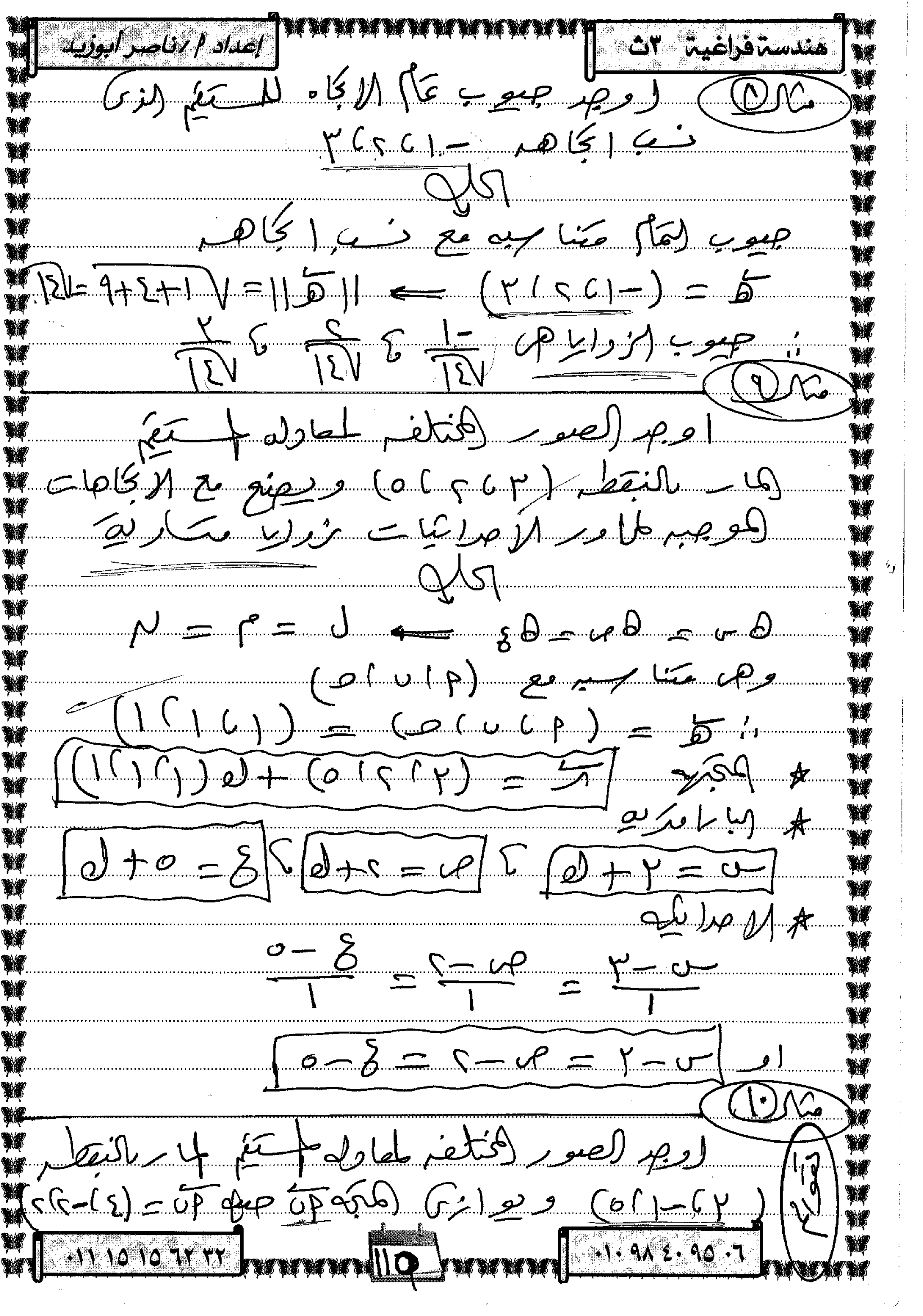
البارامترية

ومنها ر = (−٤ ، −٥/٢ ، ٤) + ل (٣ ، ٣/٢ ، −٤)

ومنها الصورة المتجهة

لإيجاد نقطة نضع ل = ٢ ∴ ر = (−٤ ، −٥/٢ ، ٤) + (٦ ، ٣ ، −٨)

∴ ر = (٢ ، ١/٢ ، −٤) وهي موضع نقطة ∈ للمستقيم



إعداد أ / ناصر أبوزيد

مثال (٨) أوجد جيوب تمام الاتجاه للمستقيم الذي نسب اتجاهه -١، ٢، ٣

الحل

جيوب التمام متناسبة مع نسب اتجاهه

$\overline{ه} = (-١، ٢، ٣) \Leftarrow ||\overline{ه}|| = \sqrt{١+٤+٩} = \sqrt{١٤}$

∴ جيوب الزوايا هي $\frac{-١}{\sqrt{١٤}}$ ، $\frac{٢}{\sqrt{١٤}}$ ، $\frac{٣}{\sqrt{١٤}}$

مثال (٩)

أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم المار بالنقطة (٣، ٢، ٥) ويصنع مع الاتجاهات الموجبة لمحاور الإحداثيات زوايا متساوية

الحل

هـس = هـص = هـع ⟸ ل = م = ن

وهي متناسبة مع (أ، ب، جـ)

∴ $\overline{ه}$ = (أ، ب، جـ) = (١، ١، ١)

* المتجهة: $\overline{ر}$ = (٣، ٢، ٥) + ك(١، ١، ١)

* البارامترية: س = ٣ + ك ، ص = ٢ + ك ، ع = ٥ + ك

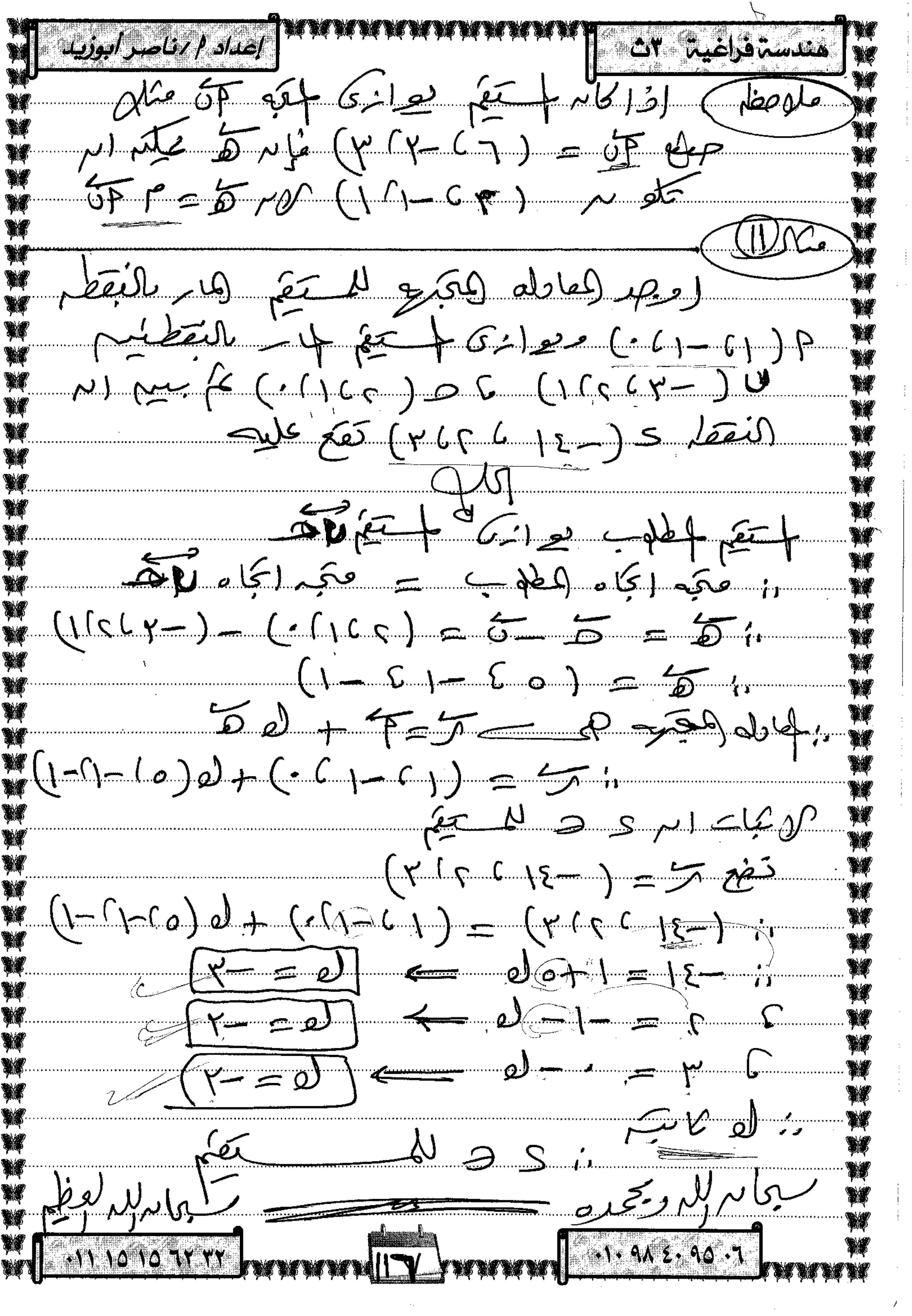
* الإحداثية:

$\frac{س-٣}{١} = \frac{ص-٢}{١} = \frac{ع-٥}{١}$

أو س - ٣ = ص - ٢ = ع - ٥

مثال (١٠)

أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم المار بالنقطة (٢، -١، ٥) ويوازي المتجه $\overline{أب}$ حيث $\overline{أب}$ = (٤، -٢، ٢)



ملاحظة: إذا كان المستقيم يوازي المتجه $\overrightarrow{أب}$ مثال

حيث $\overrightarrow{أب}$ = (٦، -٢، ٣) فإن $\overrightarrow{ه}$ يمكن أن

تكون (٣، -١، ١) لأن $\overrightarrow{ه}$ = م $\overrightarrow{أب}$

مثال (١١)

أوجد المعادلة المتجهة للمستقيم المار بالنقطة أ(١، -١، ٠) ويوازي المستقيم $\overleftrightarrow{بجـ}$ المار بالنقطتين ب(-٣، ٢، ١)، جـ(٢، ١، ٠) ثم بين أن النقطة د(-١٤، ٢، ٣) تقع عليه

الحل

المستقيم المطلوب يوازي المستقيم $\overleftrightarrow{بجـ}$

∴ متجه اتجاه المطلوب = متجه اتجاه $\overleftrightarrow{بجـ}$

∴ $\overrightarrow{ه}$ = $\overrightarrow{جـ}$ - $\overrightarrow{ب}$ = (٢، ١، ٠) - (-٣، ٢، ١)

∴ $\overrightarrow{ه}$ = (٥، -١، -١)

∵ المعادلة المتجهة هي $\overrightarrow{ر}$ = $\overrightarrow{أ}$ + ك $\overrightarrow{ه}$

∴ $\overrightarrow{ر}$ = (١، -١، ٠) + ك(٥، -١، -١)

لإثبات أن د ∈ للمستقيم

نضع $\overrightarrow{ر}$ = (-١٤، ٢، ٣)

∴ (-١٤، ٢، ٣) = (١، -١، ٠) + ك(٥، -١، -١)

∴ -١٤ = ١ + ٥ك ⟸ **ك = -٣**

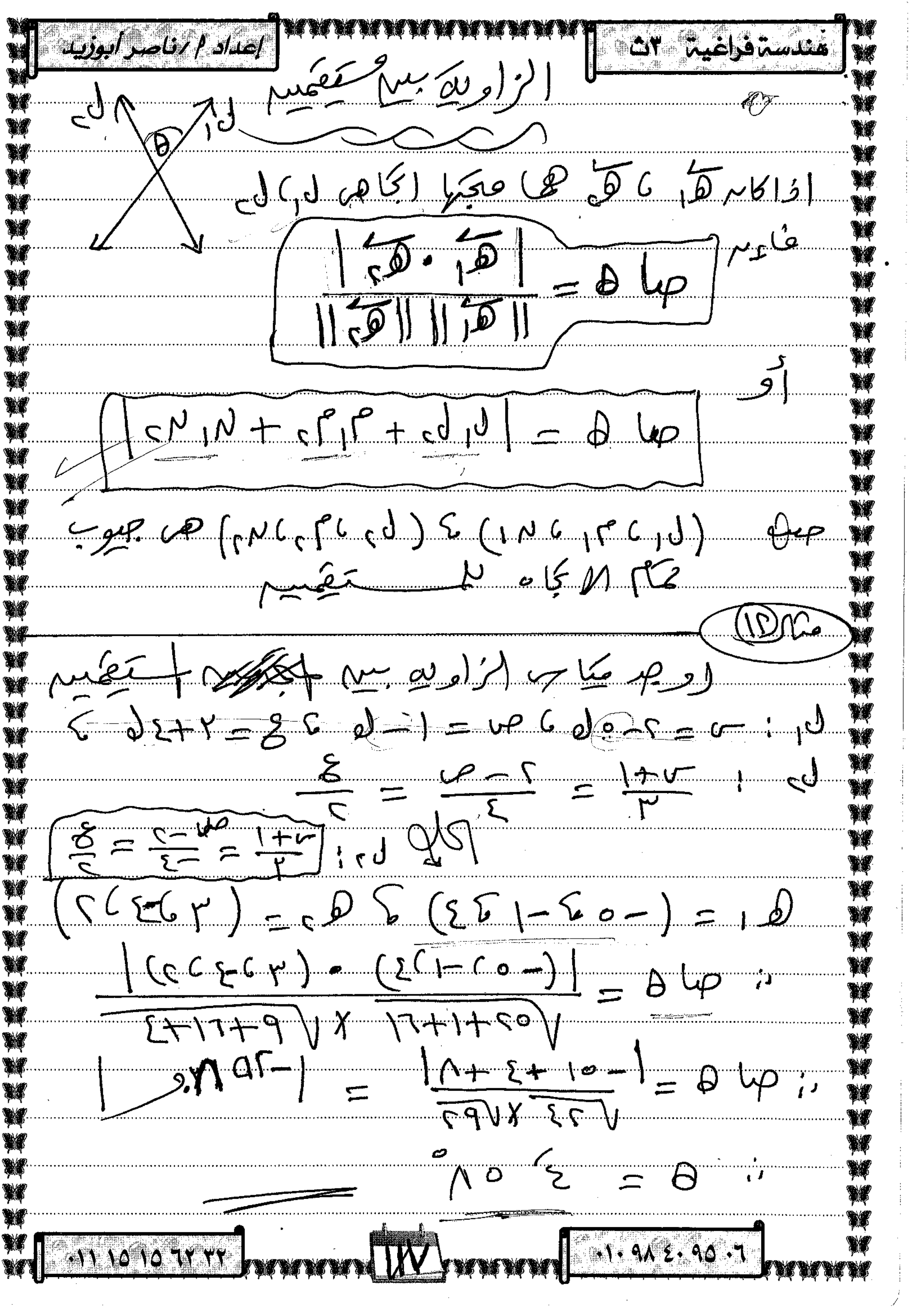
، ٢ = -١ - ك ⟸ **ك = -٢**

، ٣ = ٠ - ك ⟸ **ك = -٢**

∴ ك ثابتة

∴ د ∈ للمستقيم

سبحان الله وبحمده سبحان الله العظيم



الزاوية بين مستقيمين

إذا كان $\vec{ه}_١$ ، $\vec{ه}_٢$ هما متجها اتجاه ل١ ، ل٢ فإن

$$جتا\ \theta = \frac{|\vec{ه}_١ \cdot \vec{ه}_٢|}{\|\vec{ه}_١\|\ \|\vec{ه}_٢\|}$$

أو

$$جتا\ \theta = |ل_١ ل_٢ + م_١ م_٢ + ن_١ ن_٢|$$

حيث (ل١، م١، ن١) ، (ل٢، م٢، ن٢) هي جيوب تمام الاتجاه للمستقيمين

مثال (12)

أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين

ل١ : س = ٢ − ٥ك ، ص = ١ − ك ، ع = ٢ + ٤ك ،

ل٢ : $\frac{س+١}{٣} = \frac{٢-ص}{٤} = \frac{ع}{٢}$

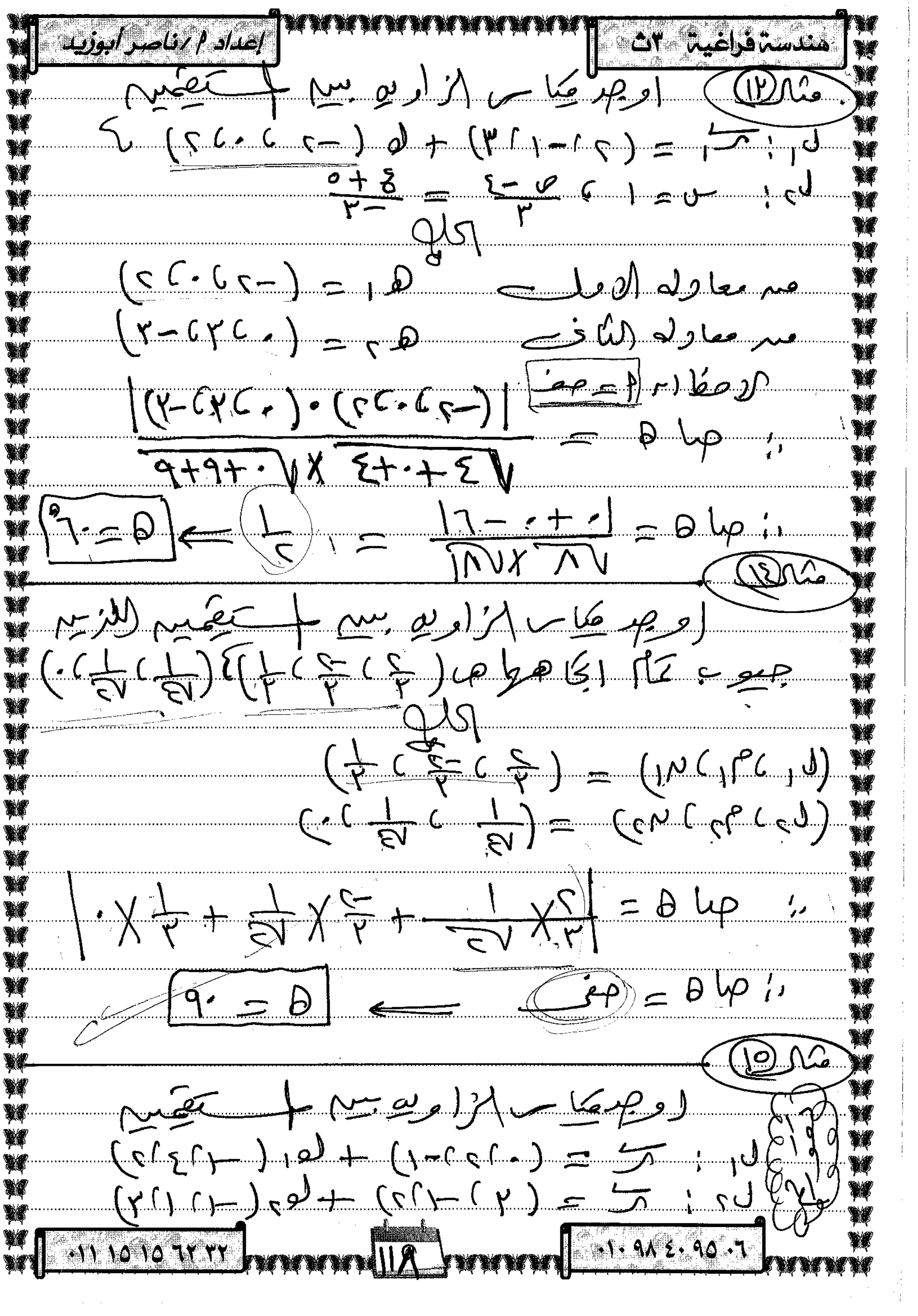
الحل ل٢ : $\frac{س+١}{٣} = \frac{ص-٢}{-٤} = \frac{ع}{٢}$

$\vec{ه}_١ = (-٥ ، -١ ، ٤)$ ، $\vec{ه}_٢ = (٣ ، -٤ ، ٢)$

$$\therefore جتا\ \theta = \frac{|(-٥ ، -١ ، ٤) \cdot (٣ ، -٤ ، ٢)|}{\sqrt{٢٥+١+١٦} \times \sqrt{٩+١٦+٤}}$$

$$\therefore جتا\ \theta = \frac{|-١٥+٤+٨|}{\sqrt{٤٢} \times \sqrt{٢٩}} = |٠.٨٥٢-|$$

$$\therefore \theta = ٨٥^\circ\ ٤'$$



مثال (١٣) أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين

ل١ : $\vec{ر}$ = (٢، ١، -٣) + ك (-٢، ٠، ٢) ،

ل٢ : س = ١ ، $\frac{ص-٤}{٣} = \frac{ع+٥}{-٣}$

الحل

من معادلة الأول ه١ = (-٢، ٠، ٢)

من معادلة الثاني ه٢ = (٠، ٣، -٣)

∵ جتا θ = $\frac{|(-٢، ٠، ٢)\cdot(٠، ٣، -٣)|}{\sqrt{٤+٠+٤} \times \sqrt{٠+٩+٩}}$

∴ جتا θ = $\frac{|٠+٠-٦|}{\sqrt{٨} \times \sqrt{١٨}}$ = $\frac{١}{٢}$ ← θ = ٦٠°

مثال (١٤)

أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين اللذين جيوب تمام اتجاههما $(\frac{٢}{٣}، \frac{-٢}{٣}، \frac{١}{٣})$ ، $(\frac{١}{\sqrt{٢}}، \frac{١}{\sqrt{٢}}، ٠)$

الحل

(ل١، م١، ن١) = $(\frac{٢}{٣}، \frac{-٢}{٣}، \frac{١}{٣})$

(ل٢، م٢، ن٢) = $(\frac{١}{\sqrt{٢}}، \frac{١}{\sqrt{٢}}، ٠)$

∵ جتا θ = $|\frac{٢}{٣} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} + \frac{-٢}{٣} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} + \frac{١}{٣} \times ٠|$

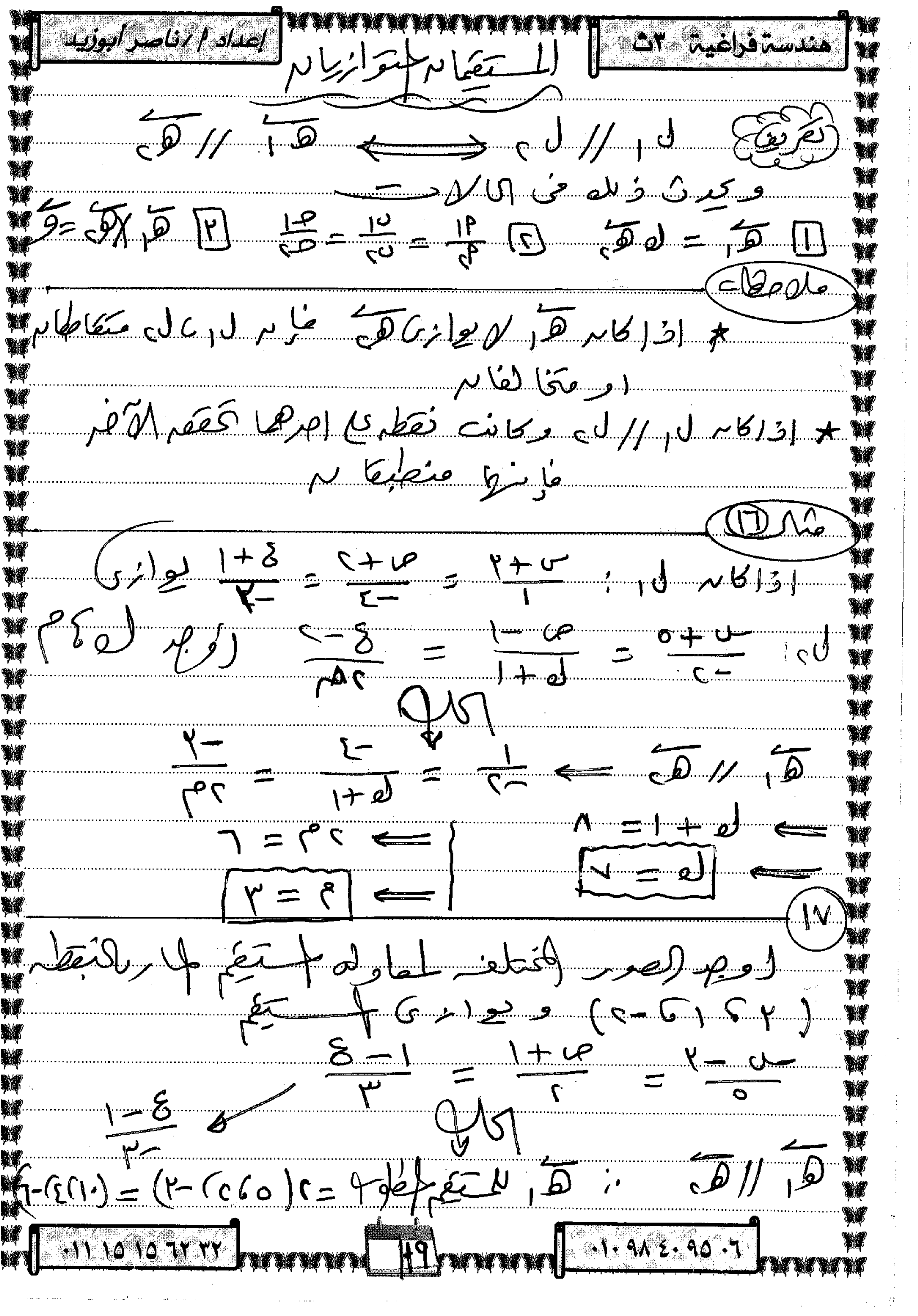
∴ جتا θ = صفر ← θ = ٩٠°

مثال (١٥)

أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين

ل١ : $\vec{ر}$ = (٠، ٢، -١) + ك١ (-١، ٤، ٢)

ل٢ : $\vec{ر}$ = (٢، -١، ٢) + ك٢ (-١، ١، ٣)



المستقيمات المتوازية

تعريف: ل١ // ل٢ $\Longleftrightarrow$ ه١ // ه٢

ويحدث ذلك في حالات

[١] ه١ = ك ه٢ [٢] ل١/ل٢ = م١/م٢ = ن١/ن٢ [٣] ه١ × ه٢ = و

ملاحظات

* إذا كان ه١ لا يوازي ه٢ فإن ل١، ل٢ متقاطعان أو متخالفان
* إذا كان ل١ // ل٢ وكانت نقطة على أحدهما تحقق الآخر فإنهما منطبقان

مثال (١٦)

إذا كان ل١ : (س + ٢)/١ = (ص + ٢)/-٢ = (ع + ١)/-٢ يوازي

ل٢ : (س + ٥)/-٢ = (ص - ١)/(ك + ١) = (ع - ٢)/٢م أوجد ك، م

الحل

ه١ // ه٢ $\Longleftarrow$ ١/-٢ = -٢/(ك + ١) = -٢/٢م

$\Longleftarrow$ ك + ١ = ٨ | $\Longleftarrow$ ٢م = ٦

$\Longleftarrow$ ك = ٧ | $\Longleftarrow$ م = ٣

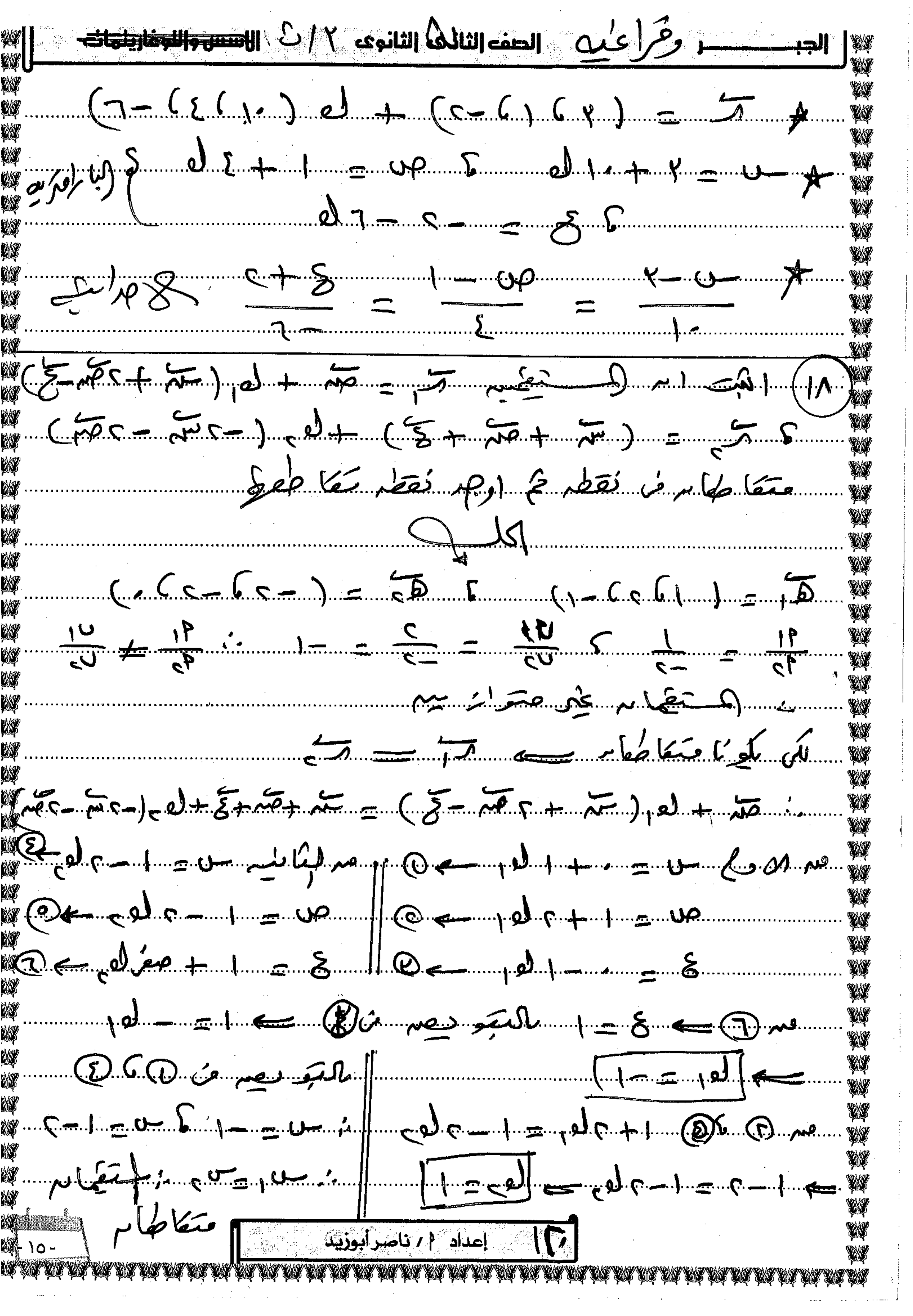
(١٧)

أوجد الصور المختلفة لمعادلة مستقيم مار بالنقطة (٢، ٢، -٣) ويوازي المستقيم

(س - ٢)/٥ = (ص + ١)/٢ = (ع - ١)/٣ ← (ع - ١)/-٣

الحل

ه١ // ه٢ ∴ ه١ للمستقيم المطلوب = (٥، ٢، -٣) = (١، ٢، -٤)



★ $\vec{r} = (2 , 1 , -2) + k\,(10 , 4 , -6)$

★ $x = 2 + 10k$ ، $y = 1 + 4k$ ، $z = -2 - 6k$ (البارامترية)

★ $\dfrac{x-2}{10} = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{z+2}{-6}$ الكارتيزية

(١٨) اثبت ان المستقيمين $\vec{r}_1 = \hat{j} + k_1(\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})$ ، $\vec{r}_2 = (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) + k_2(-2\hat{i} - 2\hat{j})$ متقاطعان في نقطة ثم اوجد نقطة تقاطعهما

الحل

$\vec{d}_1 = (1 , 2 , -1)$ ، $\vec{d}_2 = (-2 , -2 , 0)$

$\dfrac{1}{-2} = \dfrac{-1}{2}$ ، $\dfrac{2}{-2} = -1$ ∵ $\dfrac{1}{-2} \neq \dfrac{2}{-2}$

∴ المستقيمان غير متوازيين

لكي يكونا متقاطعان ← $\vec{r}_1 = \vec{r}_2$

∴ $\hat{j} + k_1(\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}) = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k} + k_2(-2\hat{i} - 2\hat{j})$

من الأولى: $x = 0 + k_1$ ← (١) ، $y = 1 + 2k_1$ ← (٢) ، $z = 0 - k_1$ ← (٣)

من الثانية: $x = 1 - 2k_2$ ← (٤) ، $y = 1 - 2k_2$ ← (٥) ، $z = 1 + 0\,k_2$ ← (٦)

من (٦) ← $z = 1$ بالتعويض في (٣) ← $1 = -k_1$

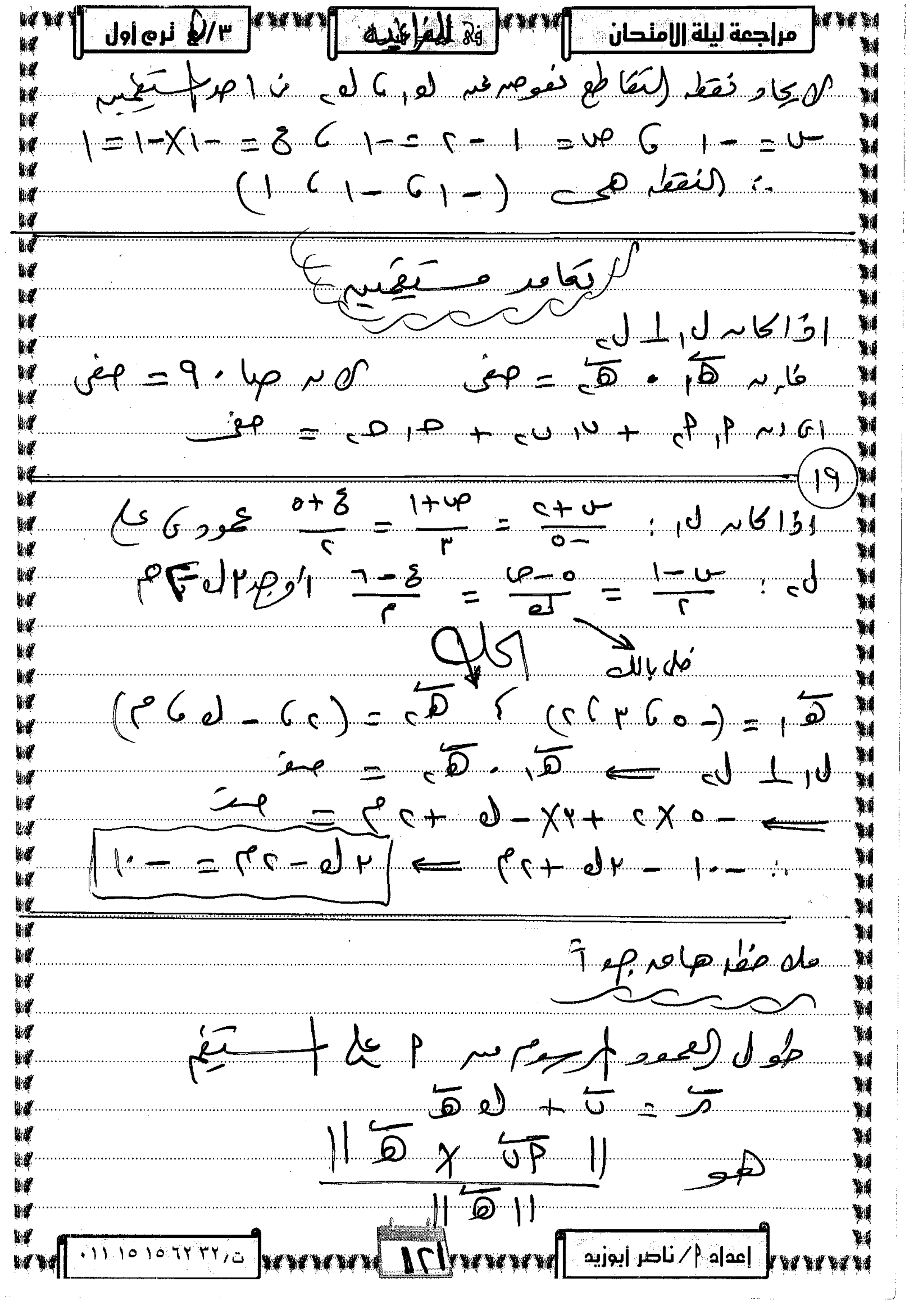
← $k_1 = -1$

من (٢)، (٥): $1 + 2k_1 = 1 - 2k_2$

← $1 - 2 = 1 - 2k_2$ ← $k_2 = 1$

بالتعويض في (١)، (٤): $x = -1$ ، $x = 1 - 2 = -1$

∴ $x_1 = x_2$ ∴ المستقيمان متقاطعان



لايجاد نقطة التقاطع نعوض عن ل، ل، في ١ من المستقيم

$س = -١ ، ص = ١ - ٢ = -١ ، ع = -١ × -١ = ١$

∴ النقطة هي $(-١ ، -١ ، ١)$

تعامد مستقيمين

اذا كان $ل_١ \perp ل_٢$

فإن $\overrightarrow{ه_١} \cdot \overrightarrow{ه_٢} = صفر$ لان جتا ٩٠ = صفر

أي ان $أ_١ أ_٢ + ب_١ ب_٢ + ج_١ ج_٢ = صفر$

(١٩) اذا كان $ل_١ : \frac{س + ٢}{-٥} = \frac{ص + ١}{٣} = \frac{ع + ٥}{٢}$ عمودي على

$ل_٢ : \frac{س - ١}{٢} = \frac{ص - ٥}{ك} = \frac{ع - ٦}{م}$ اوجد ٢ك - ٣م

الحل

خلي بالك

$\overrightarrow{ه_١} = (-٥ ، ٣ ، ٢)$ ، $\overrightarrow{ه_٢} = (٢ ، -ك ، م)$

$ل_١ \perp ل_٢ \Leftarrow \overrightarrow{ه_١} \cdot \overrightarrow{ه_٢} = صفر$

$\Leftarrow -٥ × ٢ + ٣ × -ك + ٢م = صفر$

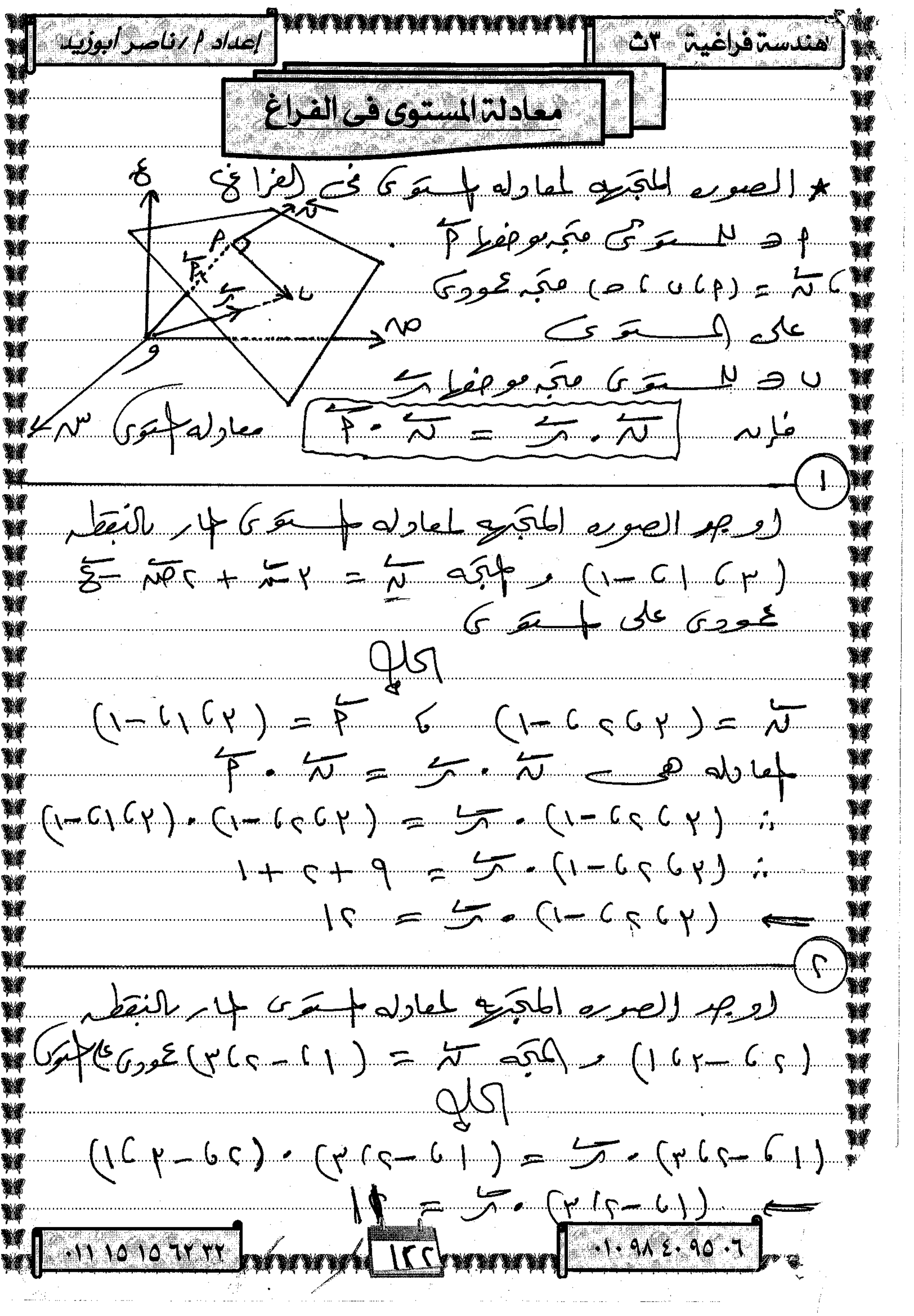
∴ $-١٠ - ٣ك + ٢م \Leftarrow$ $\boxed{٣ك - ٢م = -١٠}$

ملاحظة هامة جداً

طول العمود المرسوم من أ على المستقيم

$\vec{ر} = \vec{ب} + ك \vec{ه}$

هو $\frac{\| \overrightarrow{أب} \times \vec{ه} \|}{\| \vec{ه} \|}$



إعداد أ/ ناصر أبوزيد

معادلة المستوى فى الفراغ

★ الصورة المتجهة لمعادلة المستوى في الفراغ

أ ∈ للمستوى متجه موضعها $\overrightarrow{أ}$

$\overrightarrow{ن} = (أ ، ب ، حـ)$ متجه عمودي على المستوى

ب ∈ للمستوى متجه موضعها $\overrightarrow{ر}$

فإن $\overrightarrow{ن} \cdot \overrightarrow{ر} = \overrightarrow{ن} \cdot \overrightarrow{أ}$ معادلة المستوى

(١)

أوجد الصورة المتجهة لمعادلة المستوى المار بالنقطة (٣ ، ١ ، −١) والمتجه $\overrightarrow{ن} = ٢\overrightarrow{س} + ٢\overrightarrow{ص} - \overrightarrow{ع}$ عمودي على المستوى

الحل

$\overrightarrow{ن} = (٢ ، ٢ ، -١)$ ، $\overrightarrow{أ} = (٣ ، ١ ، -١)$

المعادلة هي $\overrightarrow{ن} \cdot \overrightarrow{ر} = \overrightarrow{ن} \cdot \overrightarrow{أ}$

∴ $(٢ ، ٢ ، -١) \cdot \overrightarrow{ر} = (٢ ، ٢ ، -١) \cdot (٣ ، ١ ، -١)$

∴ $(٢ ، ٢ ، -١) \cdot \overrightarrow{ر} = ٩ + ٢ + ١$

⟸ $(٢ ، ٢ ، -١) \cdot \overrightarrow{ر} = ١٢$

(٢)

أوجد الصورة المتجهة لمعادلة المستوى المار بالنقطة (٢ ، −٢ ، ١) والمتجه $\overrightarrow{ن} = (١ ، -٢ ، ٣)$ عمودي على المستوى

الحل

$(١ ، -٢ ، ٣) \cdot \overrightarrow{ر} = (١ ، -٢ ، ٣) \cdot (٢ ، -٢ ، ١)$

⟸ $(١ ، -٢ ، ٣) \cdot \overrightarrow{ر} = ٩$

الصورة الكارتيزية والعامة

إذا كان $\vec{ن}$ = (أ، ب، جـ) ، $\vec{ر}$ = (س، ص، ع) ، $\vec{أ}$ = (س١، ص١، ع١)

الصورة الكارتيزية: أ(س − س١) + ب(ص − ص١) + جـ(ع − ع١) = ٠

الصورة العامة: أس + ب ص + جـ ع + د = صفر

حيث د = −أ س١ − ب ص١ − جـ ع١

(٣)

أوجد الصورة العامة والكارتيزية لمعادلة المستوى المار بالنقطة أ(٣، −٥، ٢) والمتجه $\vec{ن}$ = ٢$\hat{س}$ + $\hat{ص}$ − $\hat{ع}$ عمودي على المستوى

(أ ، ب ، جـ)

الحل

الصورة الكارتيزية: أ(س − س١) + ب(ص − ص١) + جـ(ع − ع١) = ٠

⟸ ٢(س − ٣) + ١(ص + ٥) − (ع − ٢) = صفر

⟸ بفك الأقواس

٢س − ٦ + ص + ٥ − ع + ٢ = صفر

⟸ ٢س + ص − ع + ١ = صفر

وهي الصورة العامة

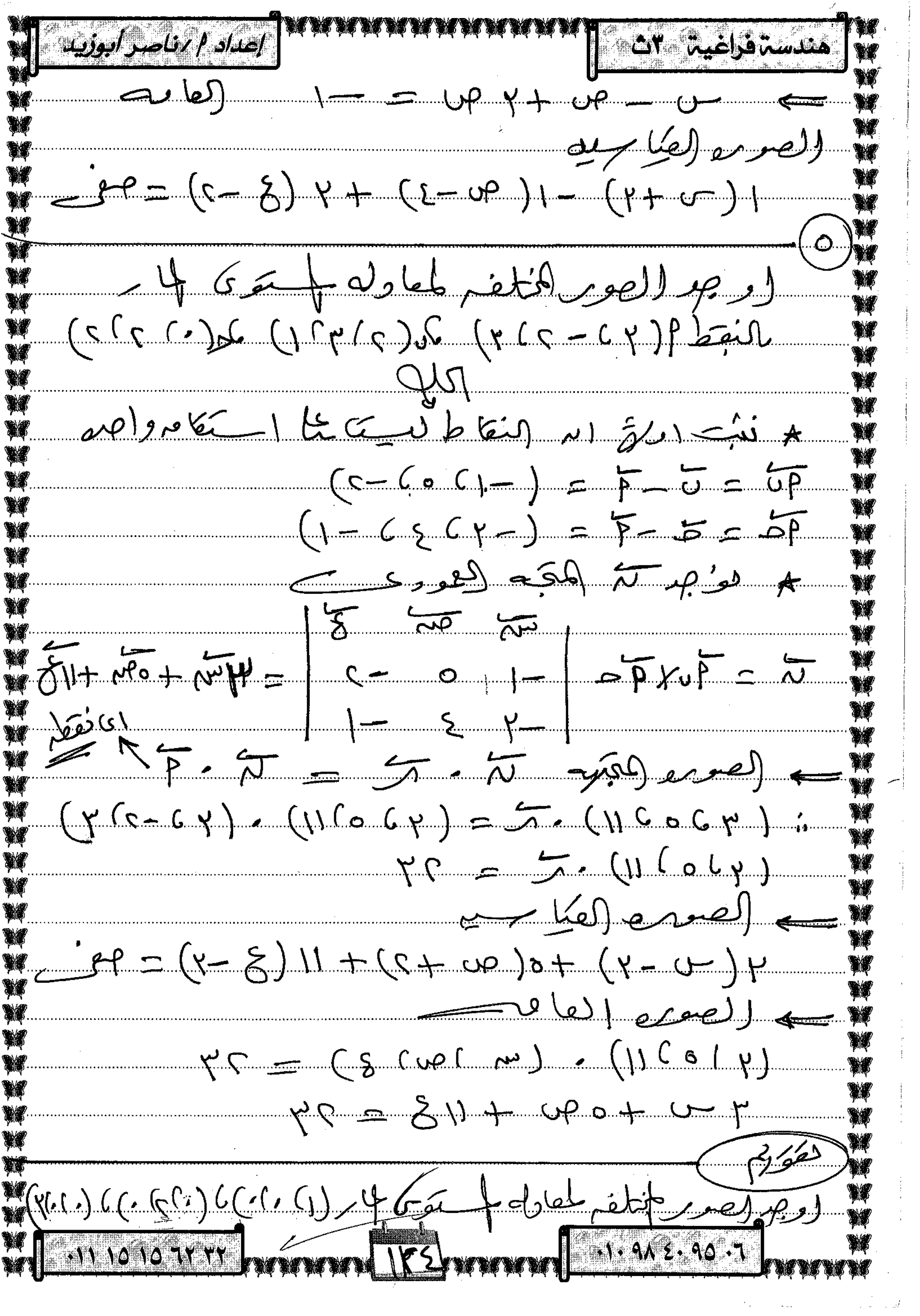
(٤)

أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستوى المار بالنقطة (−٢، ٤، ٢) والمتجه $\vec{ن}$ = (١، −١، ٣) عمودي على المستوى

الحل

الصورة المتجهة: (١، −١، ٣) • $\vec{ر}$ = (١، −١، ٣) • (−٢، ٤، ٢)

⟸ (١، −١، ٣) • $\vec{ر}$ = −١



⟸ س − ص + ٢ص = −١ العامة

الصورة الكارتيزية

١(س + ٢) − ١(ص − ٤) + ٢(ع − ٢) = صفر

(٥)

أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستوى المار بالنقط أ(٢، −٢، ٣)، ب(٢، ٣، ١)، جـ(٠، ٢، ٢)

الحل

* نثبت أولاً أن النقاط ليست على استقامة واحدة

$\overrightarrow{أب}$ = $\overrightarrow{ب}$ − $\overrightarrow{أ}$ = (−١، ٥، −٢)

$\overrightarrow{أجـ}$ = $\overrightarrow{جـ}$ − $\overrightarrow{أ}$ = (−٢، ٤، −١)

* نوجد $\overrightarrow{ن}$ المتجه العمودي

$\overrightarrow{ن}$ = $\overrightarrow{أب}$ × $\overrightarrow{أجـ}$ = | $\overrightarrow{س}$ $\overrightarrow{ص}$ $\overrightarrow{ع}$ / −١ ٥ −٢ / −٢ ٤ −١ | = ٣$\overrightarrow{س}$ + ٥$\overrightarrow{ص}$ + ١١$\overrightarrow{ع}$

⟸ الصورة المتجهة $\overrightarrow{ن}$ · $\overrightarrow{ر}$ = $\overrightarrow{ن}$ · $\overrightarrow{أ}$ ← أي نقطة

∴ (٣، ٥، ١١) · $\overrightarrow{ر}$ = (٢، ٥، ١١) · (٢، −٢، ٣)

(٢، ٥، ١١) · $\overrightarrow{ر}$ = ٣٢

⟸ الصورة الكارتيزية

٢(س − ٢) + ٥(ص + ٢) + ١١(ع − ٢) = صفر

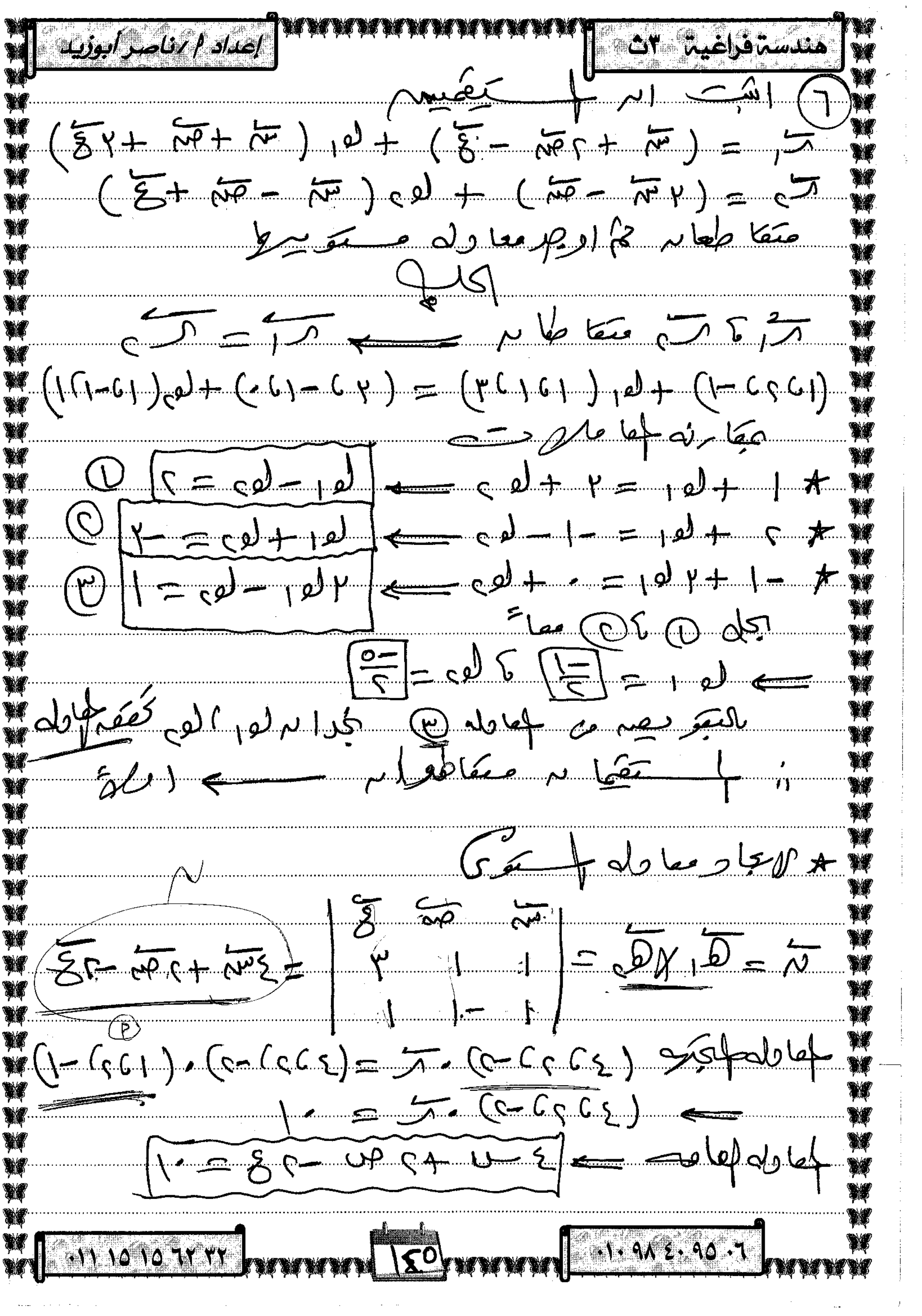
⟸ الصورة العامة

(٢، ٥، ١١) · (س، ص، ع) = ٣٢

٣س + ٥ص + ١١ع = ٣٢

تمرين

أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستوى المار بالنقط (١، ٠، ٢)، (٠، ٢، ٢)، (٢، ٠، ٠)



(٦) اثبت ان المستقيمين

$\vec{r}_1 = (\hat{س} + ٢\hat{ص} - \hat{ع}) + ل_١ (\hat{س} + \hat{ص} + ٢\hat{ع})$

$\vec{r}_2 = (٢\hat{س} - \hat{ص}) + ل_٢ (\hat{س} - \hat{ص} + \hat{ع})$

متقاطعان ثم اوجد معادلة مستويهما

الحل

$\because$ ر١ ، ر٢ متقاطعان ⟵ $\vec{r}_1 = \vec{r}_2$

$(١، ٢، -١) + ل_١ (١، ١، ٢) = (٢، -١، ٠) + ل_٢ (١، -١، ١)$

بمقارنة المركبات

* $١ + ل_١ = ٢ + ل_٢$ ⟵ $ل_١ - ل_٢ = ٢$ ①
* $٢ + ل_١ = -١ - ل_٢$ ⟵ $ل_١ + ل_٢ = -٣$ ②
* $-١ + ٢ل_١ = ٠ + ل_٢$ ⟵ $٢ل_١ - ل_٢ = ١$ ③

بحل ① ، ② معاً

⟵ $ل_١ = \frac{-١}{٢}$ ، $ل_٢ = \frac{-٥}{٢}$

بالتعويض في المعادلة ③ نجد ان ل١ ، ل٢ تحقق المعادلة

∴ المستقيمان متقاطعان ⟵ (المطلوب ١)

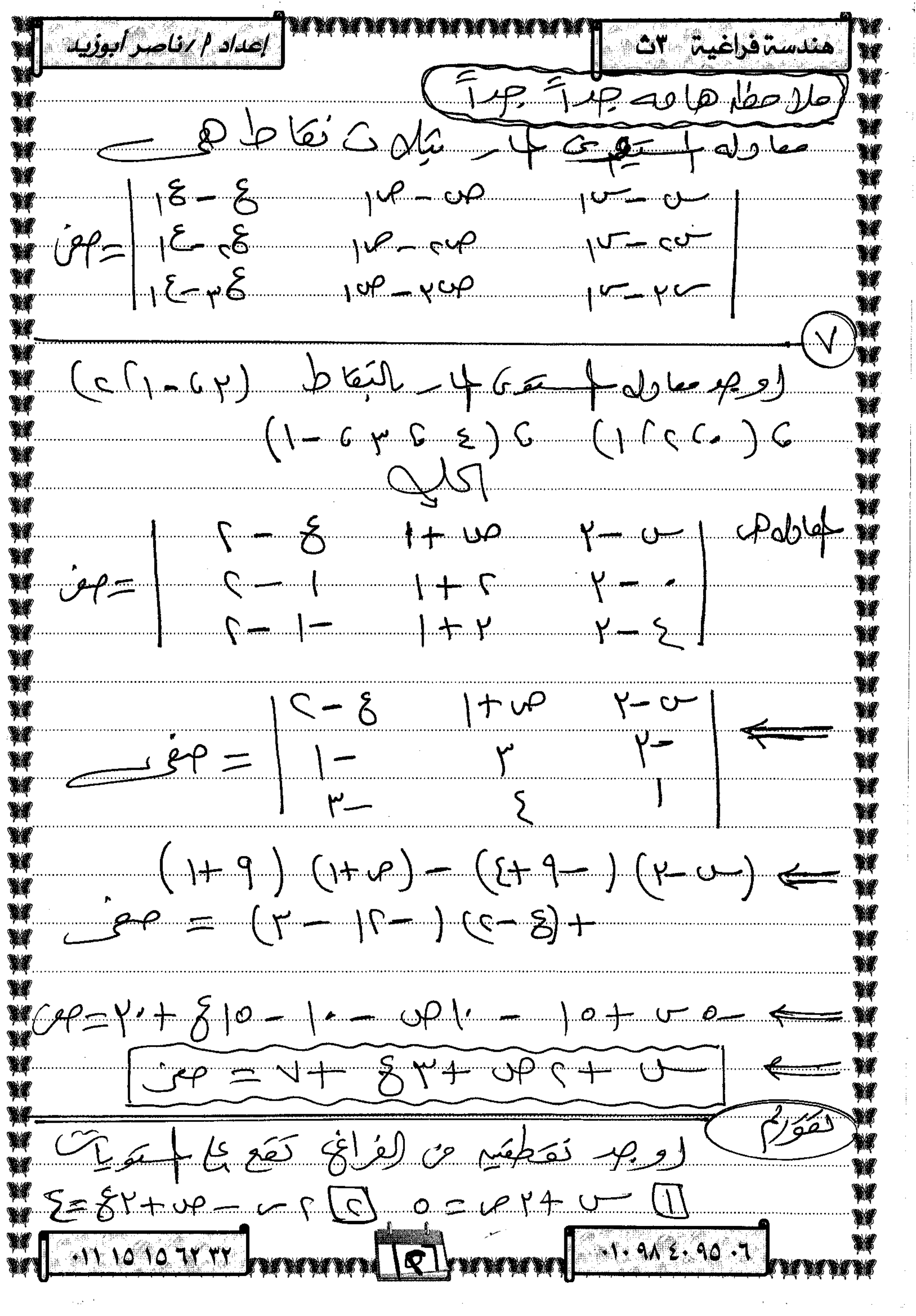
* لايجاد معادلة المستوى

$\vec{n} = \vec{ى}_١ \times \vec{ى}_٢ = \begin{vmatrix} \hat{س} & \hat{ص} & \hat{ع} \\ ١ & ١ & ٣ \\ ١ & -١ & ١ \end{vmatrix} = ٤\hat{س} + ٢\hat{ص} - ٢\hat{ع}$

معادلة المستوى $(٤، ٢، -٢) \cdot \vec{r} = (٤، ٢، -٢) \cdot (١، ٢، -١)$

⟵ $(٤، ٢، -٢) \cdot \vec{r} = ١٠$

المعادلة العامة ⟵ $٤س + ٢ص - ٢ع = ١٠$



ملاحظة هامة جداً جداً

معادلة المستوى المار بثلاث نقاط هي

$$\begin{vmatrix} س - س_1 & ص - ص_1 & ع - ع_1 \\ س_2 - س_1 & ص_2 - ص_1 & ع_2 - ع_1 \\ س_3 - س_1 & ص_3 - ص_1 & ع_3 - ع_1 \end{vmatrix} = صفر$$

(٧) أوجد معادلة المستوى المار بالنقاط (٢ ، −١ ، ٢) ، (٠ ، ٢ ، ١) ، (٤ ، ٣ ، −١)

الحل

المعادلة

$$\begin{vmatrix} س - ٢ & ص + ١ & ع - ٢ \\ ٠ - ٢ & ٢ + ١ & ١ - ٢ \\ ٤ - ٢ & ٢ + ١ & −١ - ٢ \end{vmatrix} = صفر$$

$$\Leftarrow \begin{vmatrix} س - ٢ & ص + ١ & ع - ٢ \\ −٢ & ٣ & −١ \\ ١ & ٤ & −٣ \end{vmatrix} = صفر$$

$\Leftarrow$ (س − ٢) (−٩ + ٤) − (ص + ١) (٩ + ١) + (ع − ٢) (−١٢ − ٣) = صفر

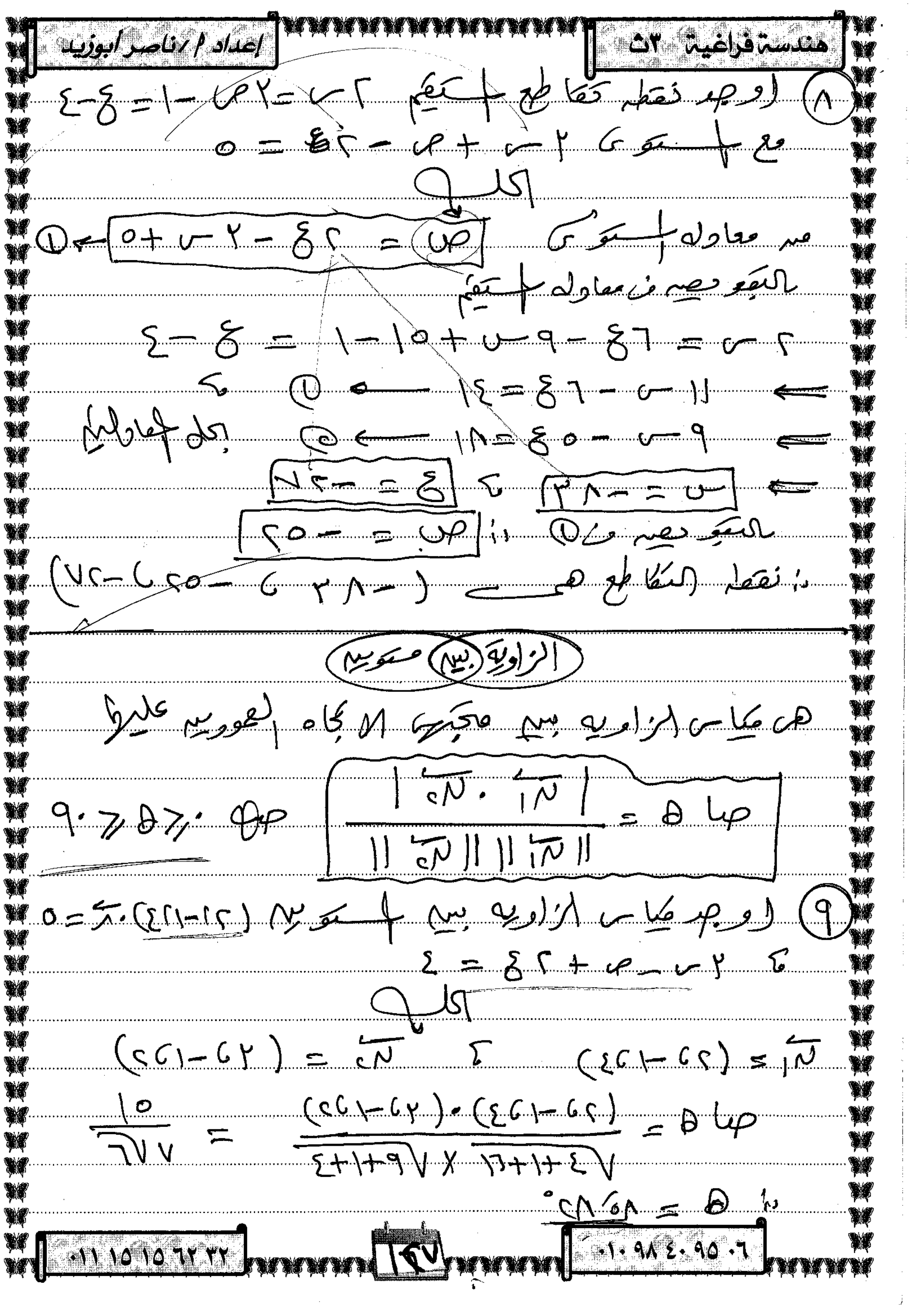
$\Leftarrow$ −٥س + ١٠ − ١٠ص − ١٠ − ١٥ع + ٣٠ = صفر

$\Leftarrow$ س + ٢ص + ٣ع + ٧ = صفر

تقويم

أوجد نقطتين من الفراغ تقع على المستويات

(١) س + ٢ص = ٥   (٢) ٢س − ص + ٢ع = ٤



(٨) أوجد نقطة تقاطع المستقيم ٢س = ٣ص − ١ = ع − ٤

مع المستوى ٣س + ص − ٢ع = ٥

الحل

من معادلة المستوى ص = ٢ع − ٣س + ٥ ⟵ (١)

بالتعويض في معادلة المستقيم

٢س = ٦ع − ٩س + ١٥ − ١ = ع − ٤

⟸ ١١س − ٦ع = ١٤ ⟵ (١) ،

⟸ ٩س − ٥ع = ١٨ ⟵ (٢) بحل المعادلتين

⟸ س = −٣٨ ، ع = −٧٢

بالتعويض في (١) ∴ ص = −٢٥

∴ نقطة التقاطع هي (−٣٨ ، −٢٥ ، −٧٢)

الزاوية بين مستويين

هي قياس الزاوية بين متجهي الاتجاه العموديين عليهما

$$جتا\ \theta = \frac{|\vec{ن}_1 \cdot \vec{ن}_2|}{\|\vec{ن}_1\|\ \|\vec{ن}_2\|}$$

∴ ٠ ≤ θ ≤ ٩٠

(٩) أوجد قياس الزاوية بين المستويين (٢ ، −١ ، ٤) . ر = ٥

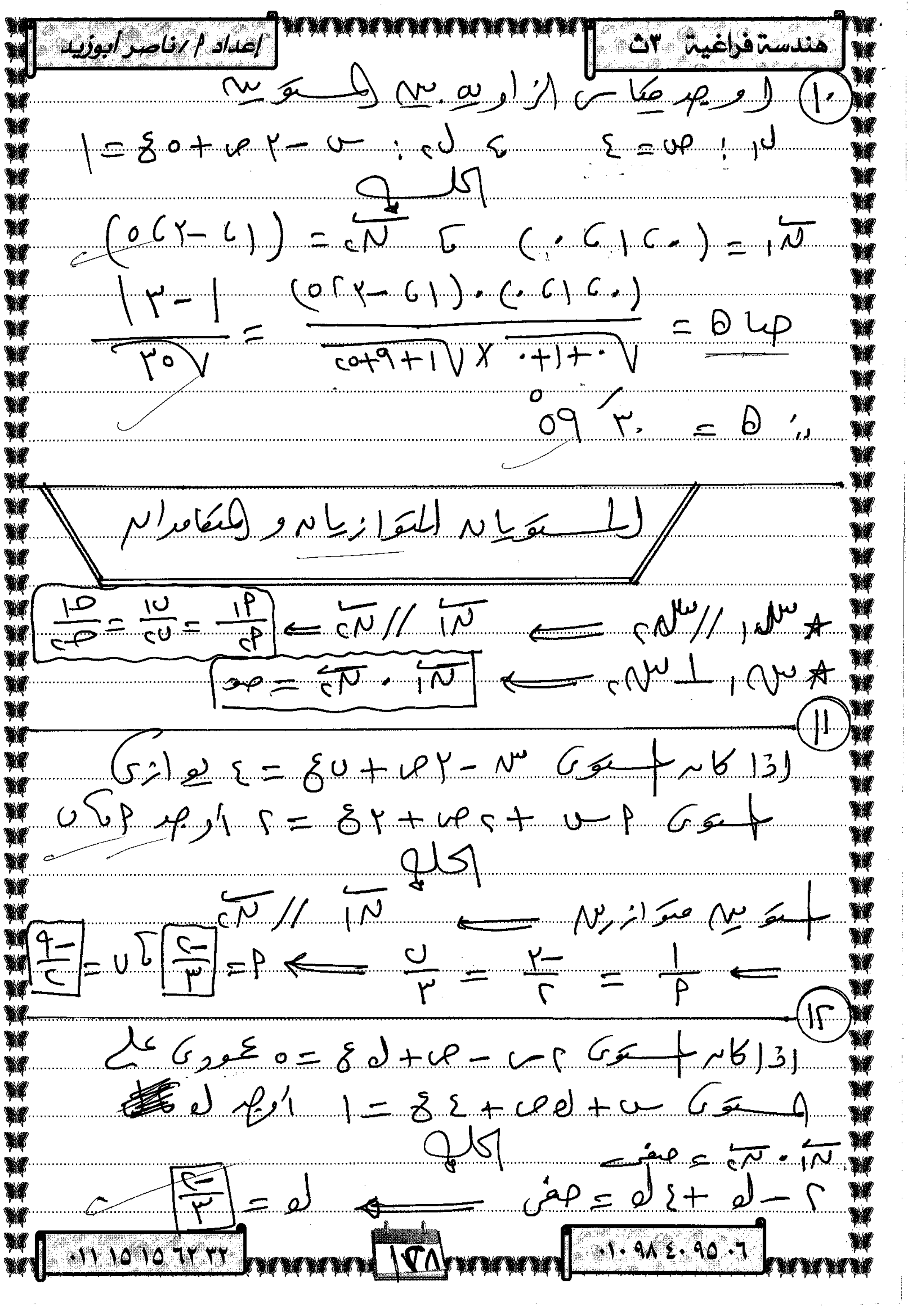
، ٣س − ص + ٢ع = ٤

الحل

ن١ = (٢ ، −١ ، ٤) ، ن٢ = (٣ ، −١ ، ٢)

$$جتا\ \theta = \frac{(٢، −١، ٤) \cdot (٣، −١، ٢)}{\sqrt{٤+١+١٦} \times \sqrt{٩+١+٤}} = \frac{١٥}{٧\sqrt{٦}}$$

∴ θ = ٢٨° ٥٨َ



(١٠) أوجد قياس الزاوية بين المستويين

ل١: ص = ٤ ، ل٢: س − ٣ص + ٥ع = ١

الحل

ن١ = (٠، ١، ٠) ، ن٢ = (١، −٣، ٥)

$$\text{جتا هـ} = \frac{|(٠،١،٠)\cdot(١،−٣،٥)|}{\sqrt{٠+١+٠} \times \sqrt{١+٩+٢٥}} = \frac{|−٣|}{\sqrt{٣٥}}$$

∴ هـ = ٥٩° ٣٠'

المستويات المتوازية والمتعامدة

* ل١ // ل٢ ⟸ ن١ // ن٢ ⟸ $\frac{أ١}{أ٢} = \frac{ب١}{ب٢} = \frac{جـ١}{جـ٢}$
* ل١ ⊥ ل٢ ⟸ ن١ · ن٢ = صفر

(١١) إذا كان المستوى س − ٣ص + بع = ٤ يوازي المستوى أس + ٢ص + ٣ع = ٢ أوجد أ، ب

الحل

المستويين متوازيين ⟸ ن١ // ن٢

⟸ $\frac{١}{أ} = \frac{−٣}{٢} = \frac{ب}{٣}$ ⟸ أ = $\frac{−٢}{٣}$ ، ب = $\frac{−٩}{٢}$

(١٢) إذا كان المستوى ٢س − ص + لع = ٠ عمودي على المستوى س + لص + ٤ع = ١ أوجد ل

الحل

ن١ · ن٢ = صفر

٢ − ل + ٤ل = صفر ⟸ ل = $\frac{−٢}{٣}$

(١٢) أوجد معادلة خط تقاطع المستويين

$٢س - ص + ٢ع = ٣$ ، $س - ٢ص + ٥ع = ٢$

الحل

بضرب المعادلة الثانية × −٢ والجمع مع الأولى لحذف س

$٥ص - ١٢ع = -٢$ بفرض ع = ك

⟸ $ص = \frac{١٢ك - ٢}{٥}$ بالتعويض في (٢)

⟸ $س = \frac{ك + ٤}{٥}$

$\frac{٥س - ٤}{١} = \frac{٥ص + ٢}{١٢} = \frac{ع}{١}$ وهي معادلة المستقيم

ملاحظة يوجد حلول أخرى

طول العمود المرسوم من نقطة إلى مستوى

أ نقطة خارج المستوى س و ب ∈ س ، $\vec{ن}$ متجه عمودي على س فإن بعد أ عن المستوى هو طول مسقط $\vec{ب أ}$ على $\vec{ن}$

$$ل = \frac{|\vec{ب أ} \cdot \vec{ن}|}{\|\vec{ن}\|}$$

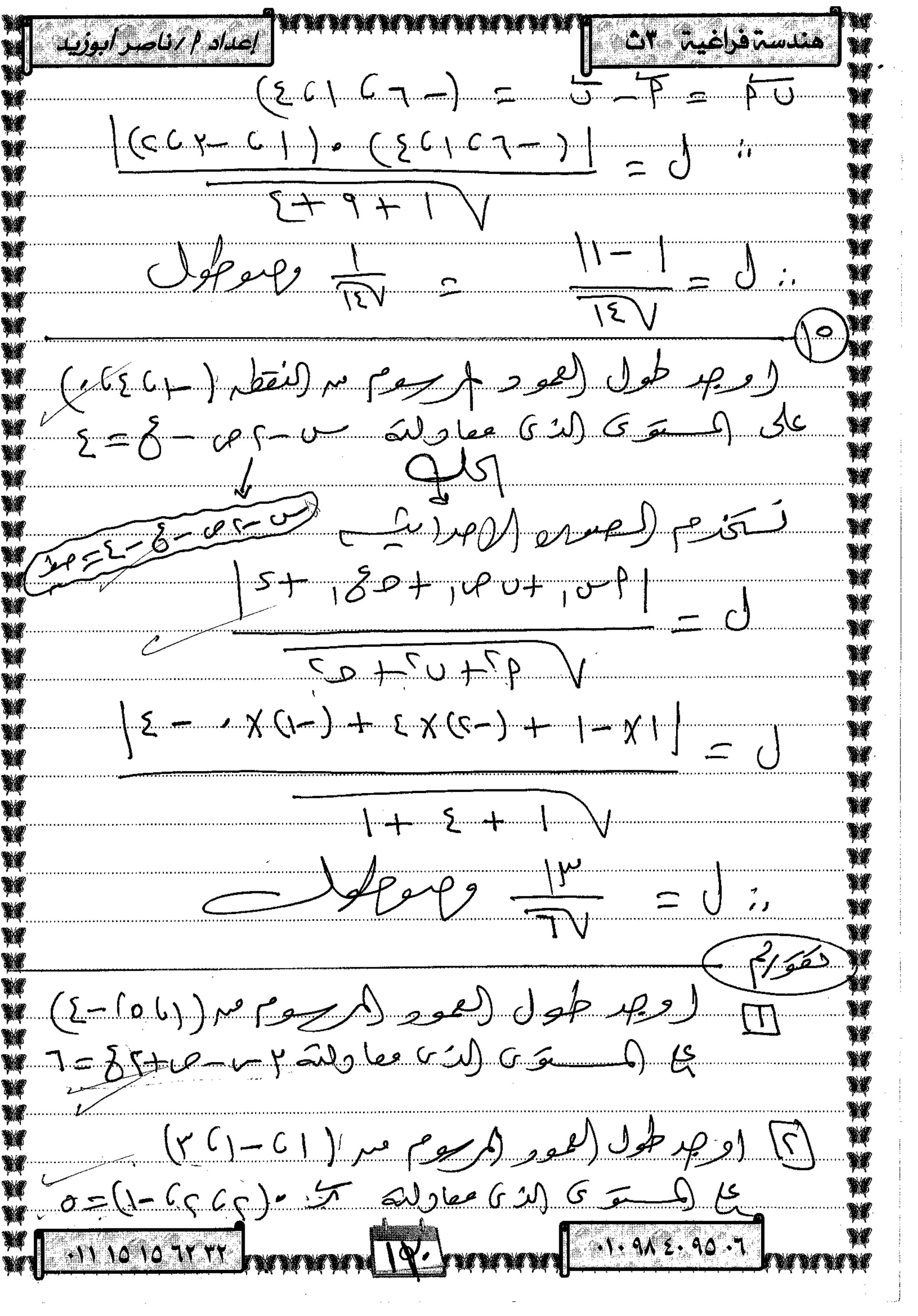
(١٤) أوجد طول العمود المرسوم من النقطة أ(−٢، ١، ٤) على المستوى الذي معادلته $\vec{ر} \cdot (١، ١، -٢) = ٤$

الحل

نفرض أن المستوى يقطع محور السينات في (س، ٠، ٠)

∴ $(س، ٠، ٠) \cdot (١، ١، -٢) = ٤$

$س = ٤$ ⟸ ب(٤، ٠، ٠) ∈ للمستوى



ن أ = أ − ن = (−٦، ١، ٤)

∴ ل = |(−٦، ١، ٤) • (١، −٣، ٢)| / √(١ + ٩ + ٤)

∴ ل = |−١| / √١٤ = ١ / √١٤ وحدة طول

(١٥)

أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (−١، ٤، ٠) على المستوى الذي معادلته س − ٢ص − ع = ٤

الحل

نستخدم الصورة الإحداثية

س − ٢ص − ع − ٤ = صفر

ل = |أ س١ + ب ص١ + جـ ع١ + د| / √(أ² + ب² + جـ²)

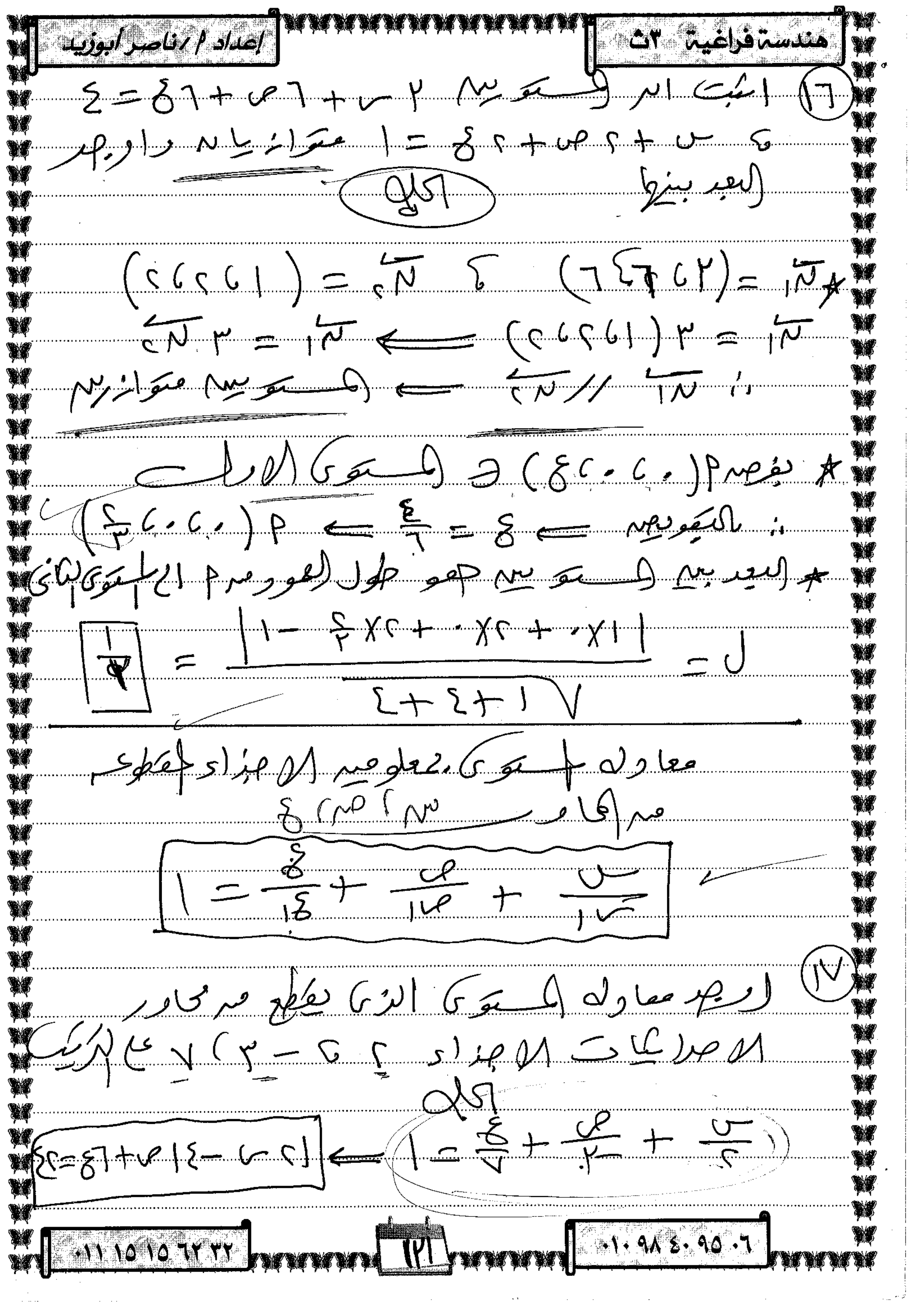
ل = |١ × −١ + (−٢) × ٤ + (−١) × ٠ − ٤| / √(١ + ٤ + ١)

∴ ل = ١٣ / √٦ وحدة طول

تقويم

١) أوجد طول العمود المرسوم من (١، ٥، −٤) على المستوى الذي معادلته ٢س − ص + ٢ع = ٦

٢) أوجد طول العمود المرسوم من (١، −١، ٣) على المستوى الذي معادلته ر • (٢، ٢، −١) = ٥



(١٦) أثبت أن المستويين ٣س + ٦ص + ٦ع = ٤ ، س + ٢ص + ٢ع = ١ متوازيان ثم أوجد البعد بينهما

الحل

* $\vec{ن_1}$ = (٣ ، ٦ ، ٦) ، $\vec{ن_2}$ = (١ ، ٢ ، ٢)

$\vec{ن_1}$ = ٣ (١ ، ٢ ، ٢) ⟸ $\vec{ن_1}$ = ٣ $\vec{ن_2}$

∴ $\vec{ن_1}$ // $\vec{ن_2}$ ⟸ المستويين متوازيين

* نفرض أ(٠ ، ٠ ، ع) ∈ المستوى الأول

∴ بالتعويض ⟸ ع = $\frac{٤}{٦}$ ⟸ أ(٠ ، ٠ ، $\frac{٢}{٣}$)

* البعد بين المستويين هو طول العمود من أ إلى المستوى الثاني

ل = $\frac{|١ \times ٠ + ٢ \times ٠ + ٢ \times \frac{٢}{٣} - ١|}{\sqrt{١ + ٤ + ٤}}$ = $\frac{١}{٩}$

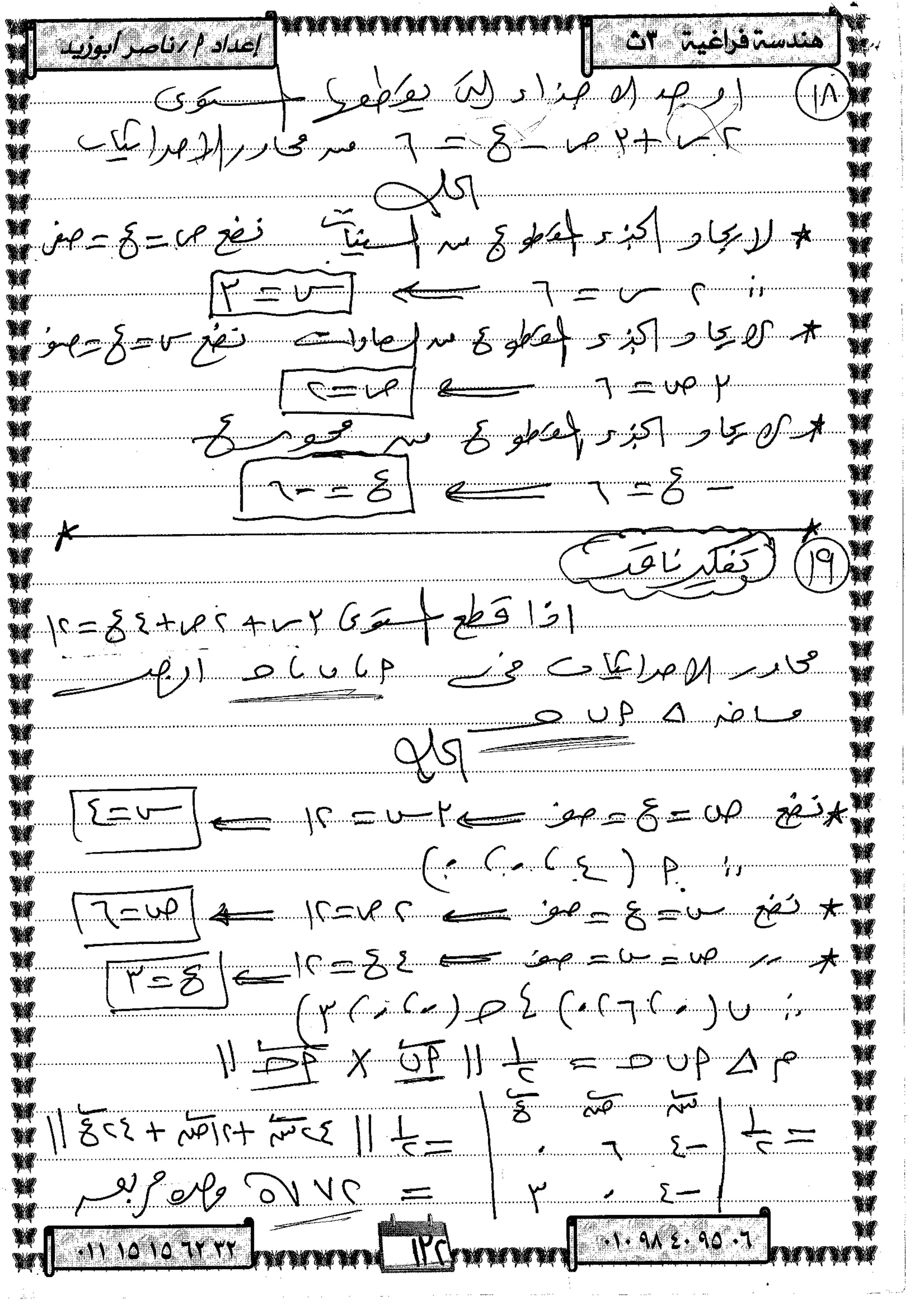
معادلة المستوى بمعلومية الأجزاء المقطوعة من المحاور س١ ، ص١ ، ع١

$$\frac{س}{س_1} + \frac{ص}{ص_1} + \frac{ع}{ع_1} = ١$$

(١٧) أوجد معادلة المستوى الذي يقطع من محاور الإحداثيات الأجزاء ٢ ، −٣ ، ٧ على الترتيب

الحل

$\frac{س}{٢} + \frac{ص}{-٣} + \frac{ع}{٧} = ١$ ⟸ ٢١س − ١٤ص + ٦ع = ٤٢



(١٨) أوجد الأجزاء التي يقطعها المستوى
$٢س + ٢ص - ع = ٦$ من محاور الإحداثيات

الحل

* لإيجاد الجزء المقطوع من السينات نضع ص = ع = صفر
∴ $٢س = ٦$ ⟸ $س = ٣$

* لإيجاد الجزء المقطوع من الصادات نضع س = ع = صفر
$٢ص = ٦$ ⟸ $ص = ٣$

* لإيجاد الجزء المقطوع من محور ع
$-ع = ٦$ ⟸ $ع = -٦$

---

(١٩) تفكير ناقد

إذا قطع المستوى $٣س + ٢ص + ٤ع = ١٢$
محاور الإحداثيات في أ ، ب ، جـ أوجد
مساحة △ أ ب جـ

الحل

* نضع ص = ع = صفر ⟸ $٣س = ١٢$ ⟸ $س = ٤$
∴ أ (٤ ، ٠ ، ٠)

* نضع س = ع = صفر ⟸ $٢ص = ١٢$ ⟸ $ص = ٦$

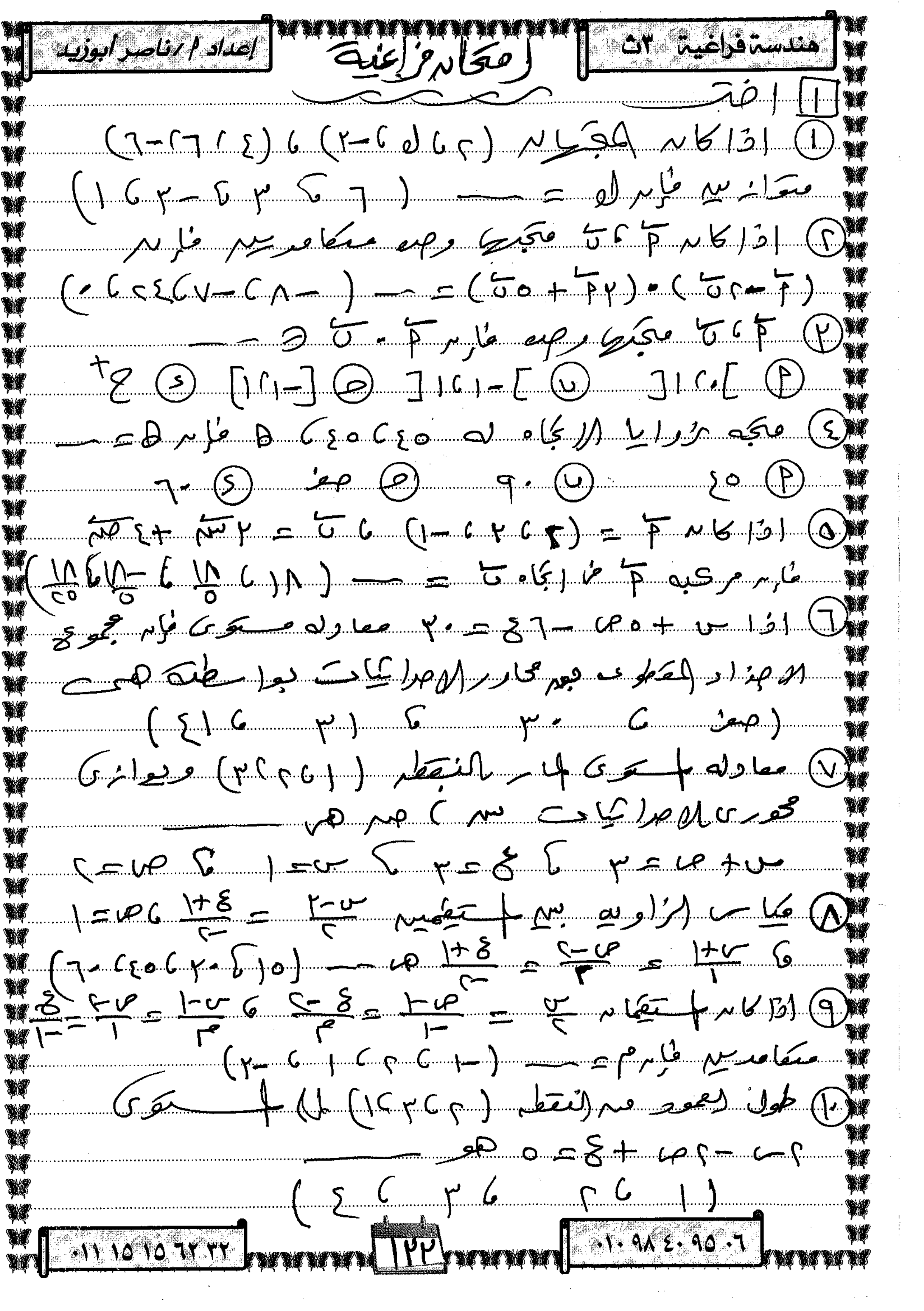
* ″ ص = س = صفر ⟸ $٤ع = ١٢$ ⟸ $ع = ٣$

∴ ب (٠ ، ٦ ، ٠) ، جـ (٠ ، ٠ ، ٣)

م △ أ ب جـ = $\frac{1}{2}$ ‖ $\overline{أب}$ × $\overline{أجـ}$ ‖

$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \overline{س} & \overline{ص} & \overline{ع} \\ -٤ & ٦ & ٠ \\ -٤ & ٠ & ٣ \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$ ‖ $١٨\overline{س} + ١٢\overline{ص} + ٢٤\overline{ع}$ ‖

= ٢٧٫٦٥ وحدة مربعة



امتحان مراجعة

[١] اختر

① إذا كان المتجهان (م، ك، -٢)، (٤، ٦، -٦) متوازيين فإن ك = ---- (٦، ٣، -٣، ١)

② إذا كان $\overline{م}$، $\overline{ن}$ متجهي وحدة متعامدين فإن ($\overline{م}$ - ٢$\overline{ن}$) • (٢$\overline{م}$ + ٥$\overline{ن}$) = ---- (-٨، -٧، ٢٤، ٠)

③ $\overline{م}$، $\overline{ن}$ متجها وحدة فإن $\overline{م}$ • $\overline{ن}$ ∈ ----

(أ)]٠، ١[(ب)]-١، ١[(جـ) [-١، ١] (د) ح+

④ متجه زوايا اتجاهه ٤٥، ٤٥، هـ فإن هـ = ----

(أ) ٤٥ (ب) ٩٠ (جـ) صفر (د) ٦٠

⑤ إذا كان $\overline{م}$ = (٣، ٢، -١)، $\overline{ن}$ = ٢س + ٤ص

فإن مركبة $\overline{م}$ في اتجاه $\overline{ن}$ = ---- (١٨، $\frac{١٨}{٥}$، -$\frac{١٨}{٥}$، $\frac{١٨}{٢٥}$)

⑥ إذا س + ٥ص - ٦ع = ٣٠ معادلة مستوى فإن مجموع الأجزاء المقطوعة من محاور الإحداثيات بواسطته هي

(صفر، ٣٠، ٣١، ٤١)

⑦ معادلة المستوى المار بالنقطة (١، ٢، ٣) ويوازي محوري الإحداثيات س، ص هو ----

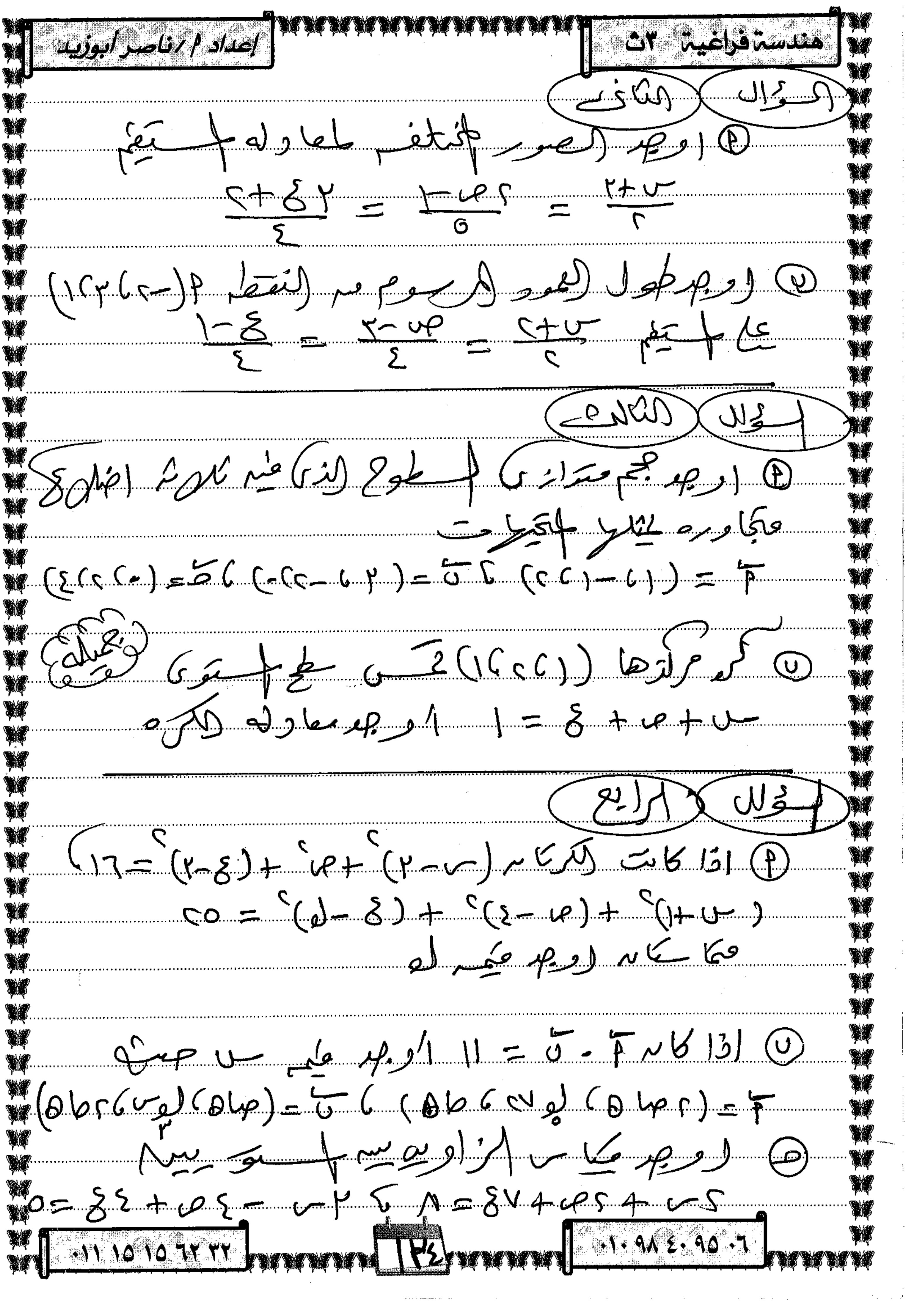
س + ص = ٣ ، ع = ٣ ، س = ١ ، ص = ٢

⑧ قياس الزاوية بين المستقيمين $\frac{س-٣}{٢} = \frac{ع+١}{٢}$ ، ص = ١ ، $\frac{س+١}{١} = \frac{ص-٢}{٣} = \frac{ع+١}{٢}$ هو ---- (١٥، ٣٠، ٤٥، ٦٠)

⑨ إذا كان المستقيمان $\frac{س}{٢} = \frac{ص-٢}{-١} = \frac{ع-٢}{م}$ ، $\frac{س-١}{م} = \frac{ص+٢}{١} = \frac{ع}{-١}$ متعامدين فإن م = ---- (-١، ٢، ١، -٢)

⑩ طول العمود من النقطة (٢، ٣، ١) على المستوى ٢س - ٢ص + ع = ٥ هو ----

(١، ٢، ٣، ٤)



إعداد أ/ ناصر أبوزيد

السؤال الثاني

(أ) أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم

$$\frac{س+٣}{٢} = \frac{٢ص-١}{٥} = \frac{٢ع+٢}{٤}$$

(ب) أوجد طول العمود المرسوم من النقطة أ(−٢ ، ٣ ، ١) على المستقيم

$$\frac{س+٢}{٢} = \frac{ص-٣}{٤} = \frac{ع-١}{٤}$$

السؤال الثالث

(أ) أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه ثلاثة أضلاع متجاورة تمثلها المتجهات

$\overline{أ} = (١ ، −١ ، ٢)$ ، $\overline{ب} = (٣ ، −٢ ، ٠)$ ، $\overline{جـ} = (٠ ، ٢ ، ٤)$

(ب) كرة مركزها (١ ، ٢ ، ١) تمس سطح المستوى (محلولة)

س + ص + ع = ١ ، أوجد معادلة الكرة

السؤال الرابع

(أ) إذا كانت الكرتان $(س-٢)^٢ + ص^٢ + (ع-٢)^٢ = ١٦$ ، $(س+١)^٢ + (ص-٤)^٢ + (ع-ل)^٢ = ٢٥$

متماستان أوجد قيمة ل

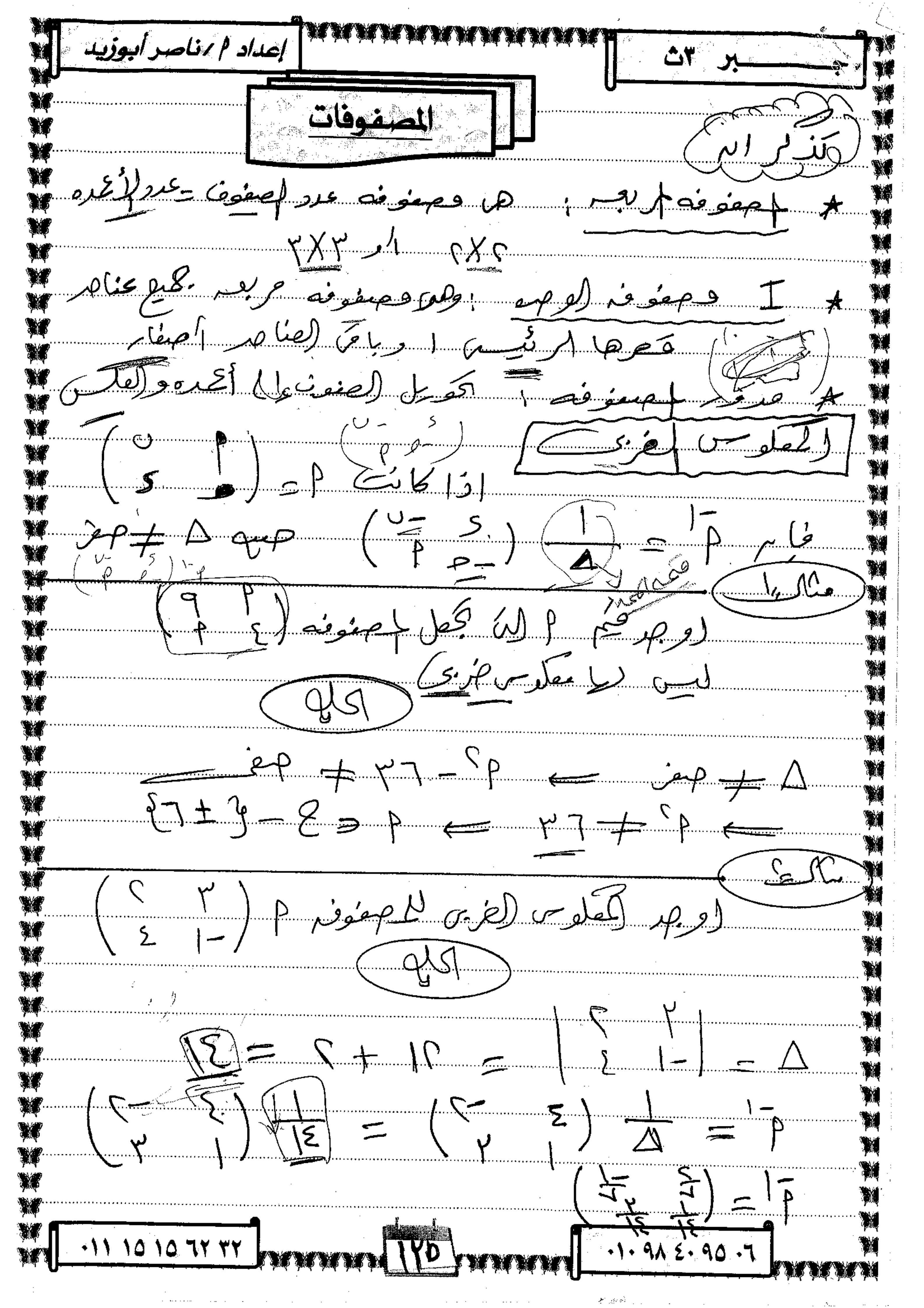
(ب) إذا كان $\overline{أ} \cdot \overline{ب} = ١١$ ، أوجد قيمة س حيث

$\overline{أ} = (٢ جاهـ ، لوس ، ظاهـ)$ ، $\overline{ب} = (جاهـ ، لو_٢ س ، ٢ظاهـ)$

(جـ) أوجد قياس الزاوية بين المستويين

٢س + ٢ص + ٧ع = ٨ ، ٢س − ٤ص + ٤ع = ٥

٠١١١٥١٥٦٢٣٢ ٠١٠٩٨٤٠٩٥٠٦



المصفوفات

تذكر أنه

* المصفوفة المربعة: هي مصفوفة عدد الصفوف = عدد الأعمدة
  ٢×٢ أو ٣×٣

* I مصفوفة الوحدة: وهي مصفوفة مربعة جميع عناصر قطرها الرئيسي ١ وباقي العناصر أصفار

* مدور المصفوفة: تحويل الصفوف إلى أعمدة والعكس

المعكوس الضربي

إذا كانت $أ = \begin{pmatrix} ب & أ \\ د & جـ \end{pmatrix}$

فإن $أ^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} -ب & د \\ أ & -جـ \end{pmatrix}$ حيث $\Delta \neq$ صفر

مثال ١:

أوجد قيم أ التي تجعل المصفوفة $\begin{pmatrix} ٩ & أ \\ أ & ٤ \end{pmatrix}$ ليس لها معكوس ضربي

الحل

$\Delta \neq$ صفر $\Leftarrow$ $أ^2 - ٣٦ \neq$ صفر

$\Leftarrow أ^2 \neq ٣٦ \Leftarrow أ \in ح - \{\pm ٦\}$

مثال ٢:

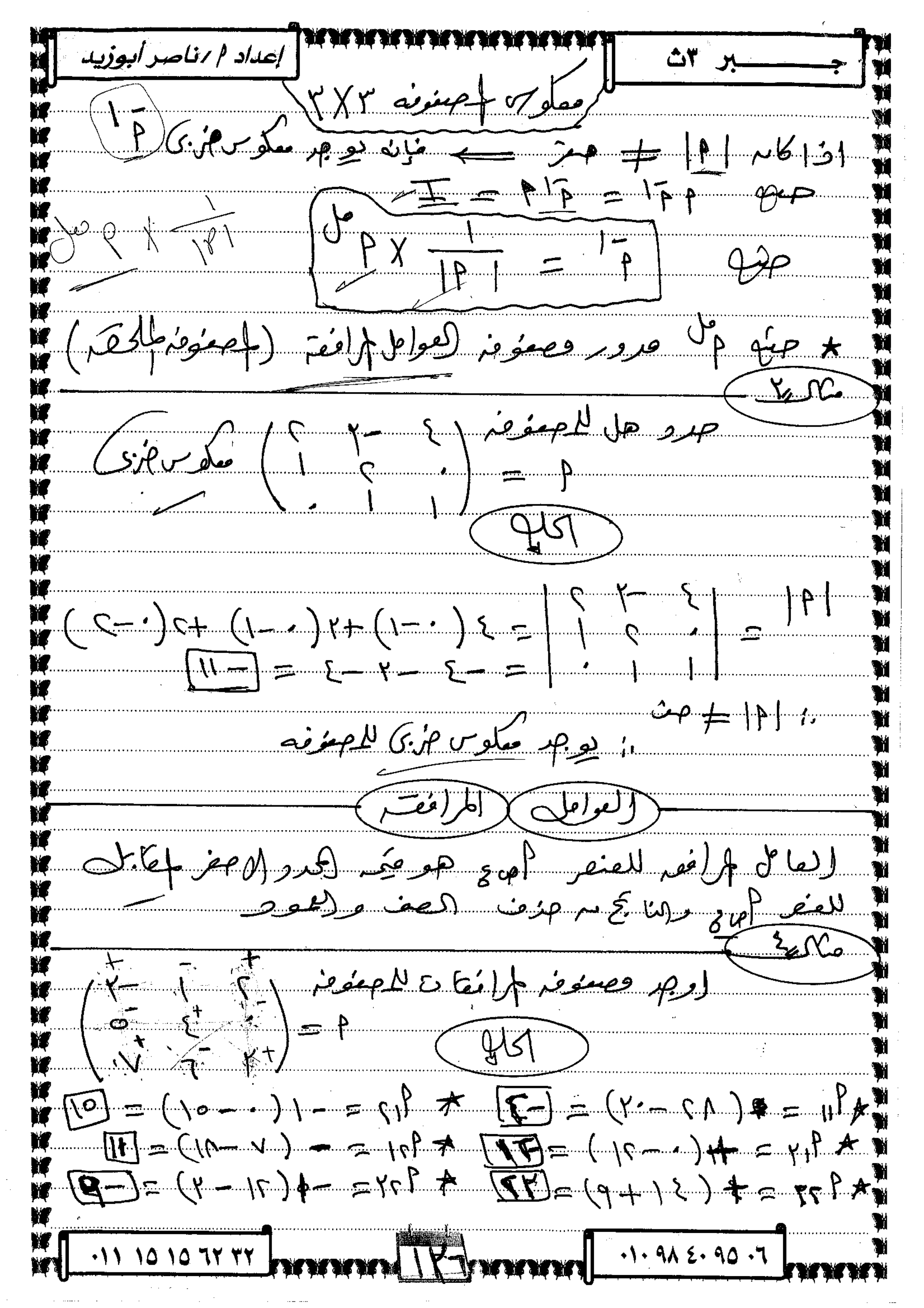
أوجد المعكوس الضربي للمصفوفة $أ = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & -١ \end{pmatrix}$

الحل

$\Delta = \begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & -١ \end{vmatrix} = ١٢ + ٢ = ١٤$

$أ^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} -٢ & ٤ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix} = \frac{1}{١٤} \begin{pmatrix} -٢ & ٤ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix}$

$أ^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-١}{٧} & \frac{٢}{٧} \\ \frac{٢}{١٤} & \frac{١}{١٤} \end{pmatrix}$



معكوس مصفوفة ٣×٣

إذا كان $|أ| \neq$ صفر ⟵ فإنه يوجد معكوس ضربي ($أ^{-1}$)

حيث $أ \cdot أ^{-1} = أ^{-1} \cdot أ = I$

حيث $أ^{-1} = \frac{1}{|أ|} \times أ^{مل}$

★ حيث $أ^{مل}$ مدور مصفوفة العوامل المرافقة (المصفوفة الملحقة)

مثال ٢/

حدد هل للمصفوفة

$$أ = \begin{pmatrix} ٤ & -٢ & ٢ \\ ٠ & ٢ & ١ \\ ١ & ١ & ٠ \end{pmatrix}$$

معكوس ضربي

الحل

$$|أ| = \begin{vmatrix} ٤ & -٢ & ٢ \\ ٠ & ٢ & ١ \\ ١ & ١ & ٠ \end{vmatrix} = ٤(٠ - ١) + ٢(٠ - ١) + ٢(٠ - ٢)$$

$$= -٤ - ٢ - ٤ = \boxed{-١٠}$$

$\therefore |أ| \neq$ صفر

$\therefore$ يوجد معكوس ضربي للمصفوفة

العوامل المرافقة

العامل المرافق للعنصر $أ_{ص ع}$ هو قيمة المحدد الأصغر المقابل للعنصر $أ_{ص ع}$ والناتج من حذف الصف والعمود

مثال ٤

أوجد مصفوفة المرافقات للمصفوفة

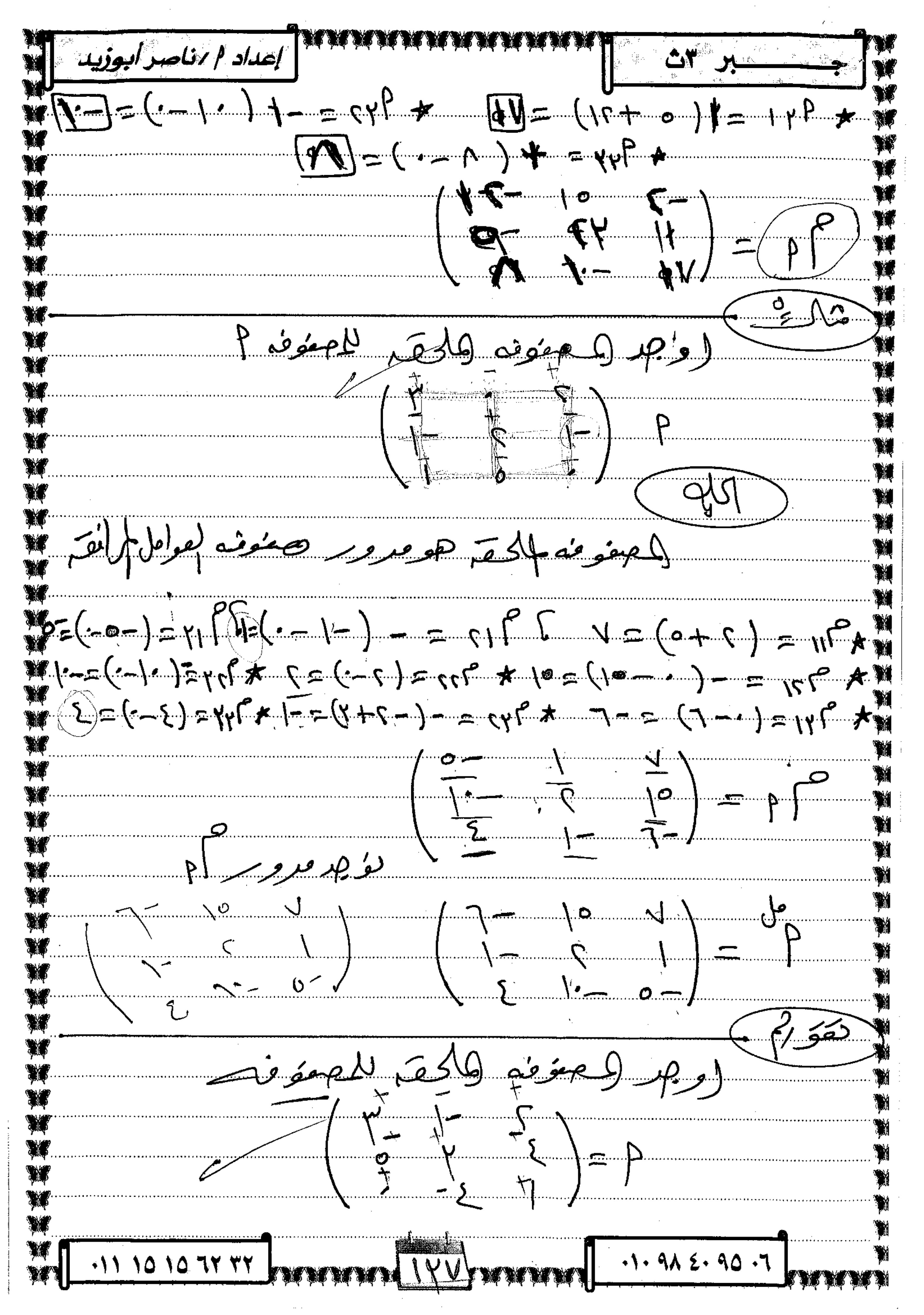
$$أ = \begin{pmatrix} ٢ & ١ & -٢ \\ ٣ & ٤ & ٥ \\ ٢ & ٦ & ٧ \end{pmatrix}$$

الحل

★ $أ_{11} = + (٢٨ - ٣٠) = \boxed{-٢}$ ★ $أ_{12} = -(٠ - ١٥) = \boxed{١٥}$

★ $أ_{21} = -(٠ - ١٢) = \boxed{١٢}$ ★ $أ_{22} = +(٧ - ١٨) = \boxed{-١١}$

★ $أ_{31} = +(١٤ + ٩) = \boxed{٢٣}$ ★ $أ_{32} = -(١٢ - ٣) = \boxed{-٩}$



★ أ١٢ = + (٥ + ١٢) = ١٧ ★ أ٢٣ = −١ (١٠ − ٠) = −١٠

★ أ٣٣ = + (٨ − ٠) = ٨

$$م_أ = \begin{pmatrix} -٢٤ & ١٥ & -٣ \\ -٥ & ٣٢ & ١١ \\ ٨ & -١٠ & ١٧ \end{pmatrix}$$

مثال ٥

أوجد المصفوفة الملحقة للمصفوفة أ

$$أ = \begin{pmatrix} ٣ & ٠ & ٢ \\ -١ & ٢ & -١ \\ ١ & ٥ & ٠ \end{pmatrix}$$

الحل

المصفوفة الملحقة هو مدور مصفوفة العوامل المرافقة

★ م١١ = (٢ + ٥) = ٧ ، م١٢ = − (−١ − ٠) = ١ ، م١٣ = (−٥ − ٠) = −٥

★ م٢١ = − (٠ − ١٥) = ١٥ ★ م٢٢ = (٢ − ٠) = ٢ ★ م٢٣ = (٠ − ١٠) = −١٠

★ م٣١ = (٠ − ٦) = −٦ ★ م٣٢ = − (−٢ + ٣) = −١ ★ م٣٣ = (٤ − ٠) = ٤

$$م_أ = \begin{pmatrix} -٥ & ١ & ٧ \\ -١٠ & ٢ & ١٥ \\ ٤ & -١ & -٦ \end{pmatrix}$$

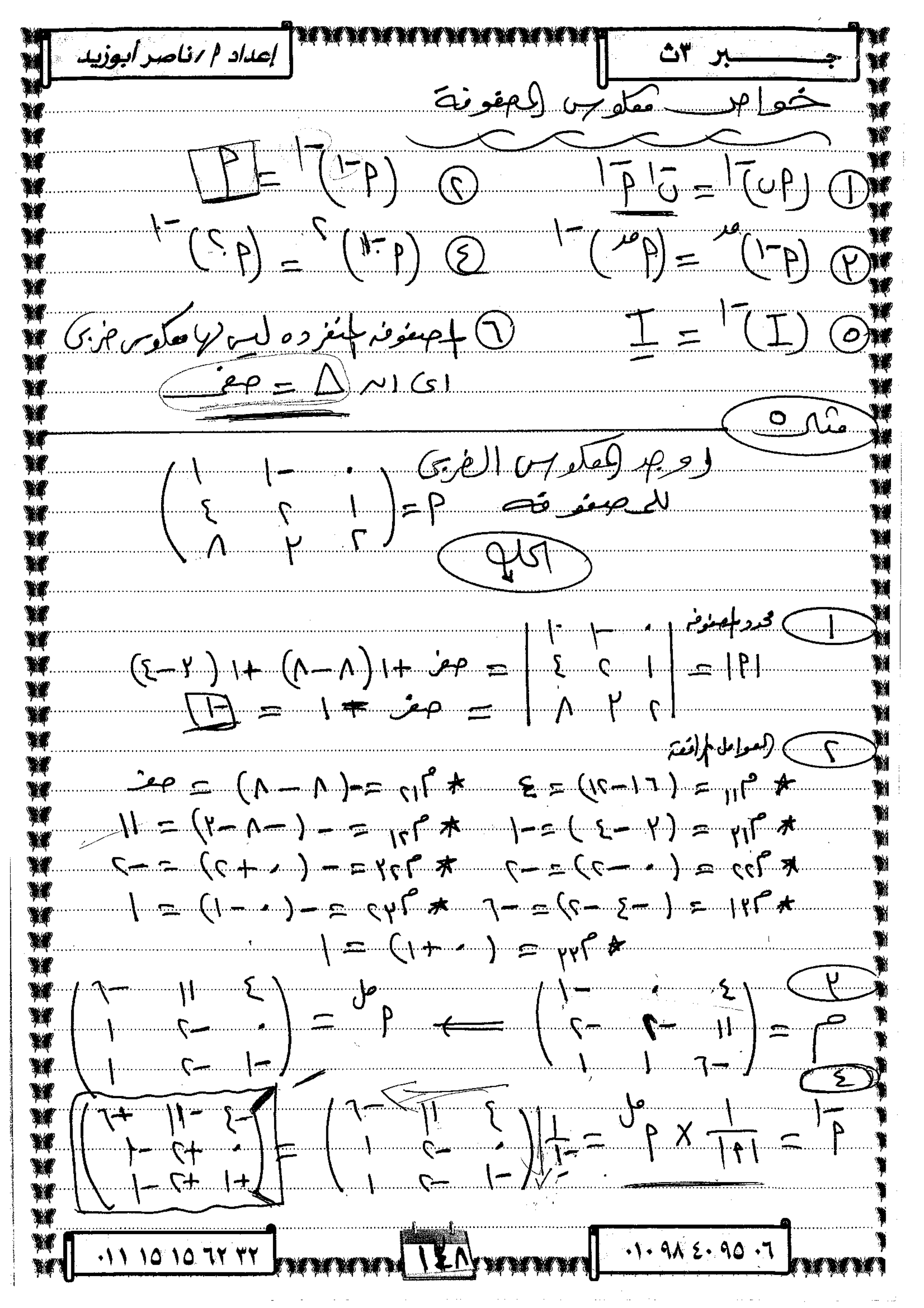
لإيجاد مدور م أ

$$أ^{ملحق} = \begin{pmatrix} -٦ & ١٥ & ٧ \\ -١ & ٢ & ١ \\ ٤ & -١٠ & -٥ \end{pmatrix}$$

تمرين

أوجد المصفوفة الملحقة للمصفوفة

$$أ = \begin{pmatrix} ٣ & -١ & ٢ \\ ٥ & ٢ & ٤ \\ & -٤ & ٦ \end{pmatrix}$$



خواص معكوس المصفوفة

① $(أب)^{-1} = ب^{-1} أ^{-1}$　　② $(أ^{-1})^{-1} = أ$

③ $(أ^{-1})^{ن} = (أ^{ن})^{-1}$　　④ $(أ^{-1})^{2} = (أ^{2})^{-1}$

⑤ $(I)^{-1} = I$　　⑥ المصفوفة المنفردة ليس لها معكوس ضربي

أي أن $\Delta =$ صفر

مثال ٥

أوجد المعكوس الضربي للمصفوفة

$$أ = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

الحل

① محدد المصفوفة

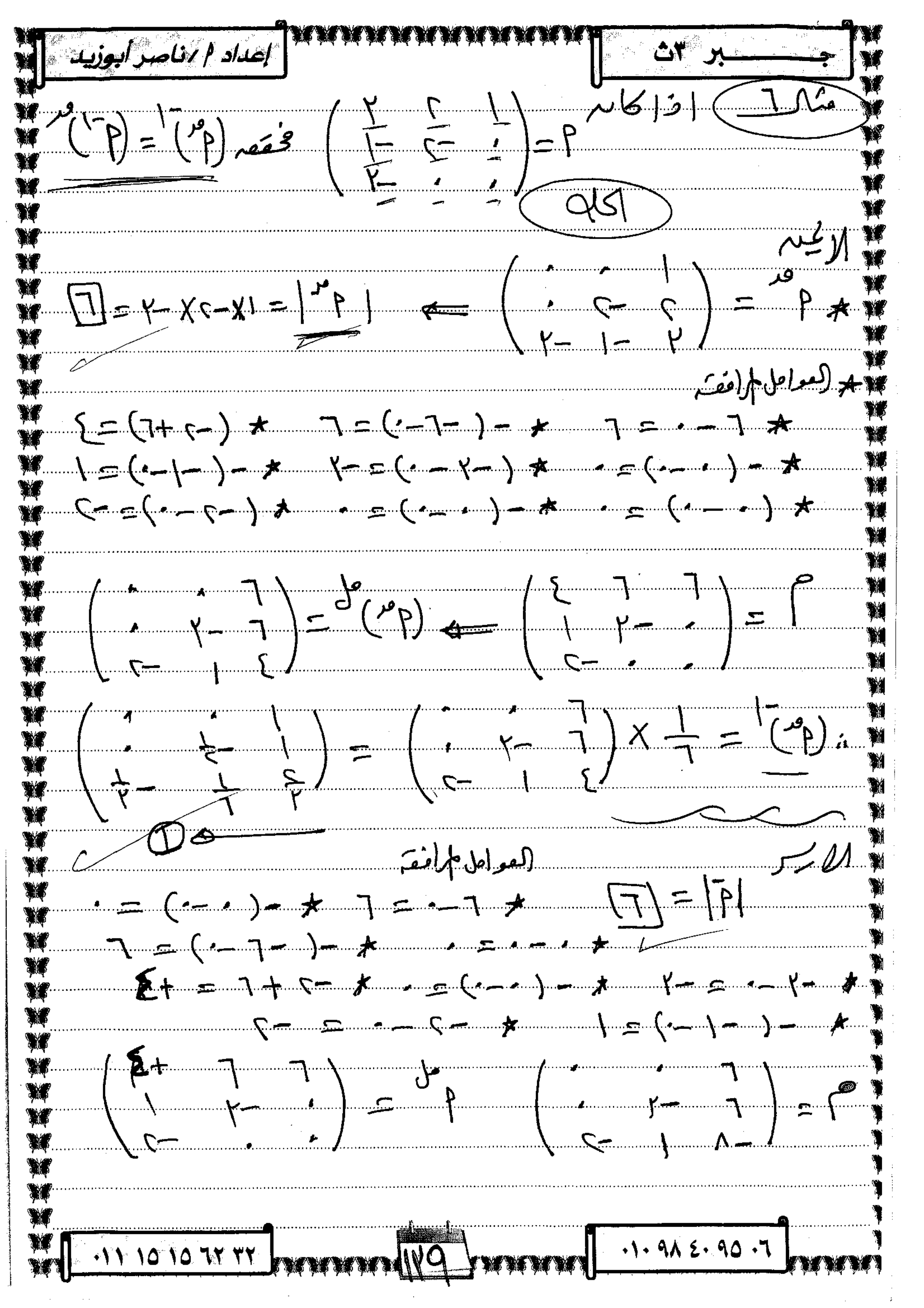
$$|أ| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 8 \end{vmatrix} = \text{صفر} + 1(8-8) + 1(3-4) = \text{صفر} + -1 = -1$$

② العوامل المرافقة

* $م_{11} = (16-12) = 4$　　* $م_{12} = -(8-8) =$ صفر
* $م_{13} = (3-4) = -1$　　* $م_{21} = -(-8-3) = 11$
* $م_{22} = (0-2) = -2$　　* $م_{23} = -(0+2) = -2$
* $م_{31} = (-4-2) = -6$　　* $م_{32} = -(0-1) = 1$
* $م_{33} = (0+1) = 1$

③
$$م = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 11 & -2 & -2 \\ -6 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow أ^{ملحق} = \begin{pmatrix} 4 & 11 & -6 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

④
$$أ^{-1} = \frac{1}{|أ|} \times أ^{ملحق} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 4 & 11 & -6 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -11 & 6 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$



مثال ٦ إذا كانت

$$أ = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

حقق $(أ^{مد})^{-1} = (أ^{-1})^{مد}$

الحل

الأيمن

$$\star\ أ^{مد} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix} \Longleftarrow |أ^{مد}| = 1 \times -2 \times -3 = \boxed{6}$$

$\star$ العوامل المرافقة

$\star\ 6 - 0 = 6 \qquad \star\ -(-6 - 0) = 6 \qquad \star\ (-2 + 6) = 4$

$\star\ -(0 - 0) = 0 \qquad \star\ (-3 - 0) = -3 \qquad \star\ -(-1 - 0) = 1$

$\star\ (0 - 0) = 0 \qquad \star\ -(0 - 0) = 0 \qquad \star\ (-2 - 0) = -2$

$$م = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 4 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow (أ^{مد})^{مل} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore (أ^{مد})^{-1} = \frac{1}{6} \times \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad (1)$$

الأيسر

$|أ| = \boxed{6}$

العوامل المرافقة

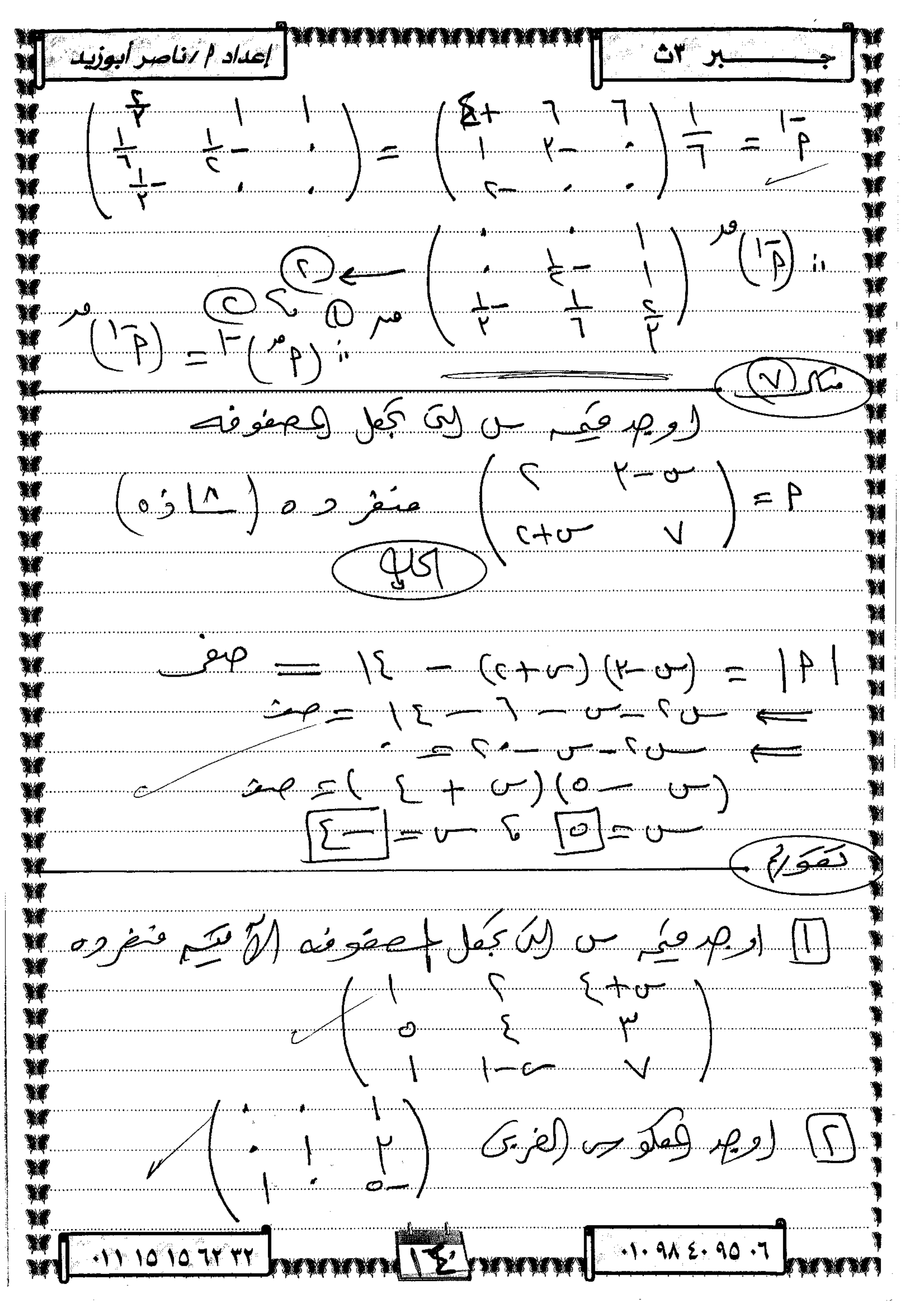
$\star\ 6 - 0 = 6 \qquad \star\ -(0 - 0) = 0$

$\star\ 0 - 0 = 0 \qquad \star\ -(-6 - 0) = 6$

$\star\ -2 - 0 = -2 \qquad \star\ -(0 - 0) = 0 \qquad \star\ -2 + 6 = +4$

$\star\ -(-1 - 0) = 1 \qquad \star\ -2 - 0 = -2$

$$م = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 0 \\ -8 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad أ^{مل} = \begin{pmatrix} 6 & 6 & +4 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$



$$أ^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 6 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\therefore (أ^{-1})^{مد} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \longrightarrow (٢)$$

من (١) ، (٢) $\therefore (أ^{مد})^{-1} = (أ^{-1})^{مد}$

مثال (٧)

أوجد قيمة س التي تجعل المصفوفة

$$أ = \begin{pmatrix} س-٢ & ٢ \\ ٧ & س+٢ \end{pmatrix}$$ منفردة (٨ ا ش د ٥)

الحل

$|أ| = (س-٢)(س+٣) - ١٤ = صفر$

$\Leftarrow س^2 - س - ٦ - ١٤ = صفر$

$\Leftarrow س^2 - س - ٢٠ = صفر$

$(س - ٥)(س + ٤) = صفر$

$س = \boxed{٥}$ ، $س = \boxed{-٤}$

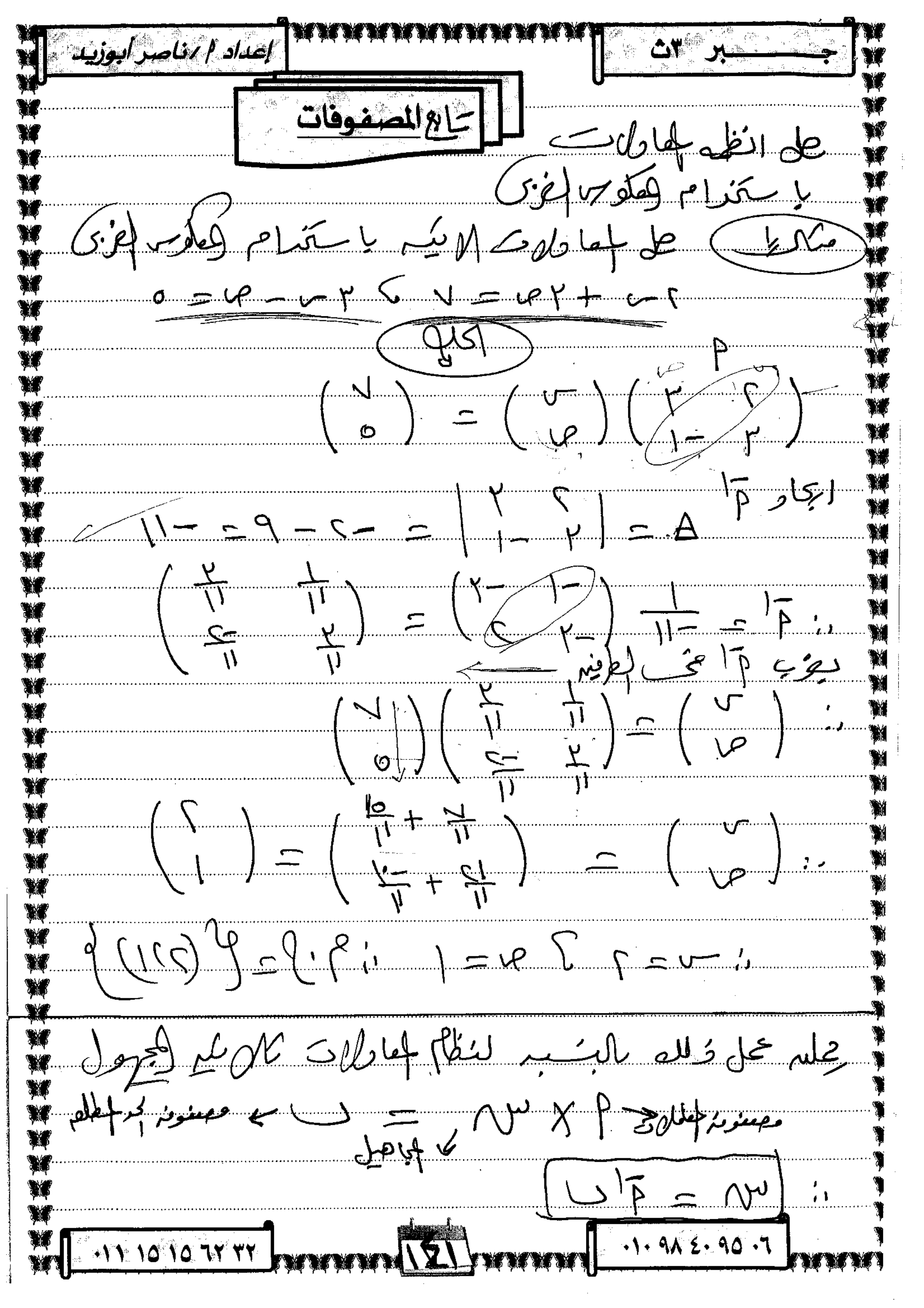
تمارين

١) أوجد قيمة س التي تجعل المصفوفة الآتية منفردة

$$\begin{pmatrix} س+٤ & ٢ & ١ \\ ٣ & ٤ & ٥ \\ ٧ & س-١ & ١ \end{pmatrix}$$

٢) أوجد المعكوس الضربي

$$\begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٢ & ١ & ٠ \\ -٥ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$$



تابع المصفوفات

حل أنظمة المعادلات باستخدام المعكوس الضربي

مثال ١: حل المعادلات الآتية باستخدام المعكوس الضربي

٢س + ٣ص = ٧ ، ٣س − ص = ٥

الحل

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

إيجاد $أ^{-1}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 9 = -11$$

$$\therefore أ^{-1} = \frac{1}{-11} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{11} & \frac{3}{11} \\ \frac{3}{11} & \frac{-2}{11} \end{pmatrix}$$

يضرب $أ^{-1}$ في الطرفين

$$\therefore \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{11} & \frac{3}{11} \\ \frac{3}{11} & \frac{-2}{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{11} + \frac{15}{11} \\ \frac{21}{11} + \frac{-10}{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

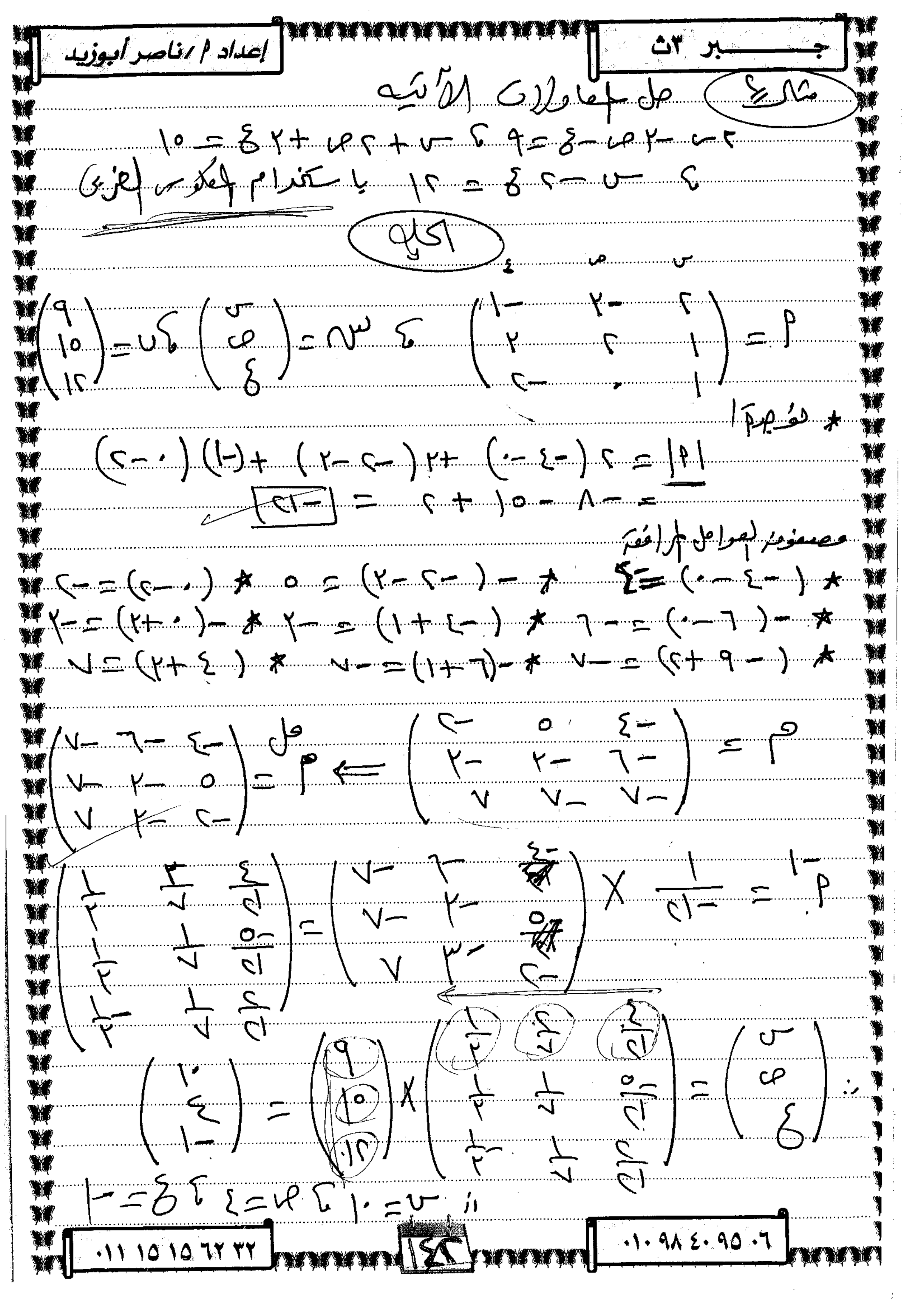
∴ س = ٢ ، ص = ١ ∴ م.ح = {(٢ ، ١)}

حلّه عمل ذلك بالنسبة لنظام المعادلات بالمجهول

مصفوفة المعاملات ← أ × س = ب → مصفوفة الحد المطلق

س ← المجاهيل

$$\therefore \boxed{س = أ^{-1} ب}$$



مثال ٤ حل المعادلات الآتية

٢س − ٢ص − ع = ٩ ، س + ٢ص + ٢ع = ١٥

، س − ٢ع = ١٢ باستخدام المعكوس الضربي

الحل

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} ، X = \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} ، B = \begin{pmatrix} 9 \\ 15 \\ 12 \end{pmatrix}$$

* نوجد |A|

$$|A| = 2(-4-0) + 2(-2-2) + (-1)(0-2)$$
$$= -8 - 15 + 2 = \boxed{-21}$$

مصفوفة العوامل المرافقة

* $(-4-0) = -4$ * $-(-2-2) = 5$ * $(0-2) = -2$
* $-(-6-0) = -6$ * $(-2+1) = -2$ * $-(0+2) = -2$
* $(-9+2) = -7$ * $-(6+1) = -7$ * $(4+2) = 7$

$$C = \begin{pmatrix} -4 & 5 & -2 \\ -6 & -2 & -2 \\ -7 & -7 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{adj} = \begin{pmatrix} -4 & -6 & -7 \\ 5 & -2 & -7 \\ -2 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-21} \times \begin{pmatrix} -4 & -6 & -7 \\ 5 & -2 & -7 \\ -2 & -3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{21} & \frac{2}{7} & \frac{1}{3} \\ \frac{-5}{21} & \frac{2}{21} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{21} & \frac{1}{7} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{21} & \frac{2}{7} & \frac{1}{3} \\ \frac{-5}{21} & \frac{2}{21} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{21} & \frac{1}{7} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 9 \\ 15 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

∴ س = ١٠ ، ص = ٤ ، ع = −١

ملاحظة

إذا كانت مصفوفة الثوابت = صفر = $\begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$

فإنه نظام المعادلات الخطية متجانســه

مثال

٢س + ٢ص − ع = ٠ ، ٥س + ص = ٠ ، ٢س − ص − ٨ع = ٠

هو نظام المعادلات خطية متجانســه

مرتبة المصفوفة

وهي أعلى درجة لمحدد أو محدد أصغر للمصفوفة فقيمته لا تساوي الصفر

مثال ١

أوجد مرتبة كل من المصفوفات الآتيه

١) أ $\begin{pmatrix} ٢ & ٧ & ٣- \\ ٣ & ٥ & ٢ \end{pmatrix}$ ٢) ب $\begin{pmatrix} ١٫٥ & ٢ & ٩ \\ ١ & ٢ & ٦ \end{pmatrix}$

الحل

١) المصفوفة أ على النظم ٢×٣ ⟸ أعلى درجة لمحدد يمكن تكوينه ٢

∵ $\begin{vmatrix} ٢ & ٧ \\ ٢ & ٥ \end{vmatrix}$ = ١٠ − ٢١ = −١١ ≠ صفر

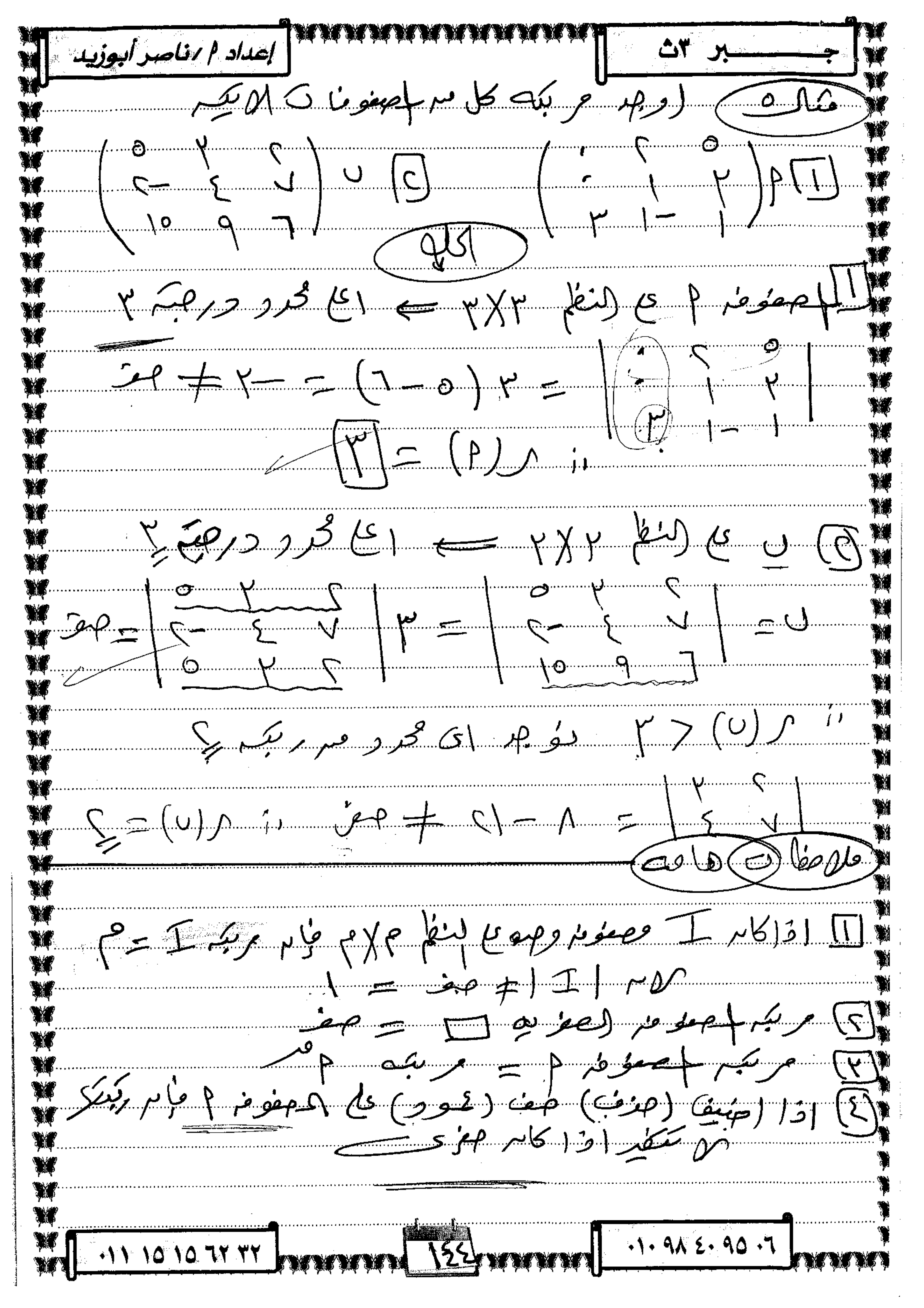
∴ ر(أ) = ٢

٢) المصفوفة ب النظم ٢×٣ ⟸ أعلى درجة لمحدد هو ٢

$\begin{vmatrix} ١٫٥ & ٢ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix}$ = ٣ − ٣ = صفر ، $\begin{vmatrix} ٢ & ٩ \\ ٢ & ٦ \end{vmatrix}$ = صفر

$\begin{vmatrix} ١٫٥ & ٩ \\ ١ & ٦ \end{vmatrix}$ = صفر كل المحددات أصفار

∴ ر(أ) < ٢ ∴ ر(أ) = ١



إعداد م / ناصر أبوزيد

مثال ٥ أوجد رتبة كل من المصفوفات الآتية

(١) أ = (٥ ٢ ٠ / ٢ ١ ٠ / ١ ١− ٣) (٢) ب = (٢ ٣ ٥ / ٧ ٤ ٢− / ٦ ٩ ١٥)

الحل

(١) المصفوفة أ على النظم ٣×٣ ⇐ أعلى محدد درجته ٣

| ٥ ٢ ٠ / ٢ ١ ٠ / ١ ١− ٣ | = ٣ (٥ − ٦) = ٢− ≠ صفر

∴ ر(أ) = ٣

(٢) ب على النظم ٣×٣ ⇐ أعلى محدد درجته ٣

ب = | ٢ ٣ ٥ / ٧ ٤ ٢− / ٦ ٩ ١٥ | = ٣ | ٢ ٣ ٥ / ٧ ٤ ٢− / ٢ ٣ ٥ | = صفر

∴ ر(ب) < ٣ نوجد أي محدد من رتبة ٢

| ٢ ٣ / ٧ ٤ | = ٨ − ٢١ ≠ صفر ∴ ر(ب) = ٢

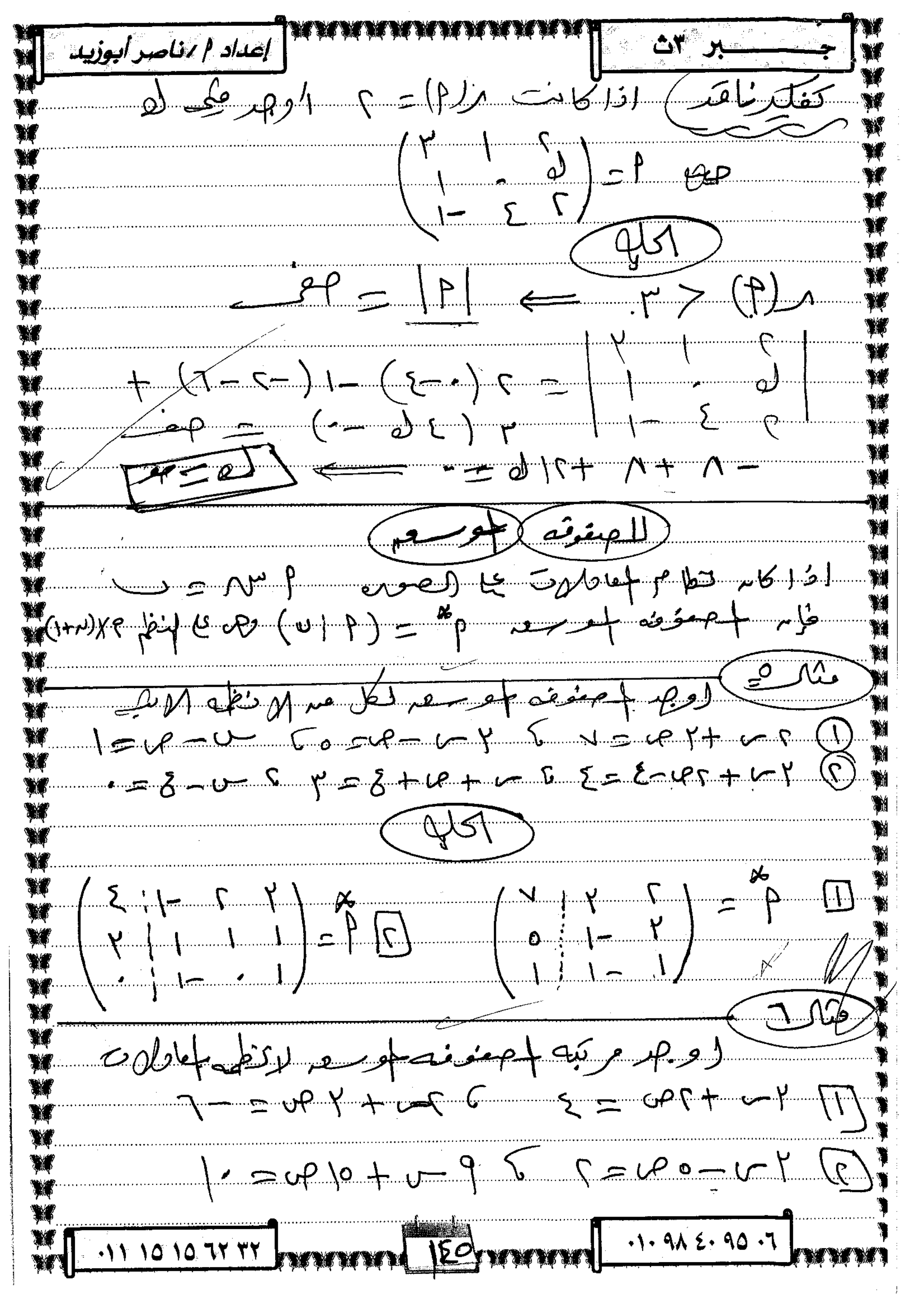
ملاحظات هامة

(١) إذا كان I مصفوفة وحدة على النظم م×م فإن رتبة I = م
لأن | I | ≠ صفر = ١

(٢) رتبة المصفوفة الصفرية [ ] = صفر

(٣) رتبة المصفوفة أ = رتبة أ مد

(٤) إذا أضيف (حذف) صف (عمود) على المصفوفة أ فإنها لا تتغير
إذا تتغير إذا كان صفري



كفكر ناقد: إذا كانت ر(أ) = ٢ أوجد قيمة ك

$$أ = \begin{pmatrix} ٣ & ١ & ٢ \\ ١ & ٠ & ك \\ ١- & ٤ & ٢ \end{pmatrix}$$

الحل

ر(أ) < ٣ ⟸ |أ| = صفر

$$\begin{vmatrix} ٢ & ١ & ٣ \\ ك & ٠ & ١ \\ ٢ & ٤ & ١- \end{vmatrix} = ٢(٠-٤) - ١(-٢-٦) + ٣(٤ك - ٠) = صفر$$

-٨ + ٨ + ١٢ك = ٠ ⟸ **ك = صفر**

المصفوفة الموسعة

إذا كان نظام معادلات على الصورة أ س = ب

فإن المصفوفة الموسعة أ* = (أ | ب) وهي على النظام م × (ن+١)

مثال ٥: أوجد المصفوفة الموسعة لكل من الأنظمة الآتية

① ٢س + ٢ص = ٧ ، ٢س - ص = ٥ ، س - ص = ١

② ٢س + ٢ص - ٤ع = ٤ ، س + ص + ع = ٣ ، س - ع = ٠

الحل

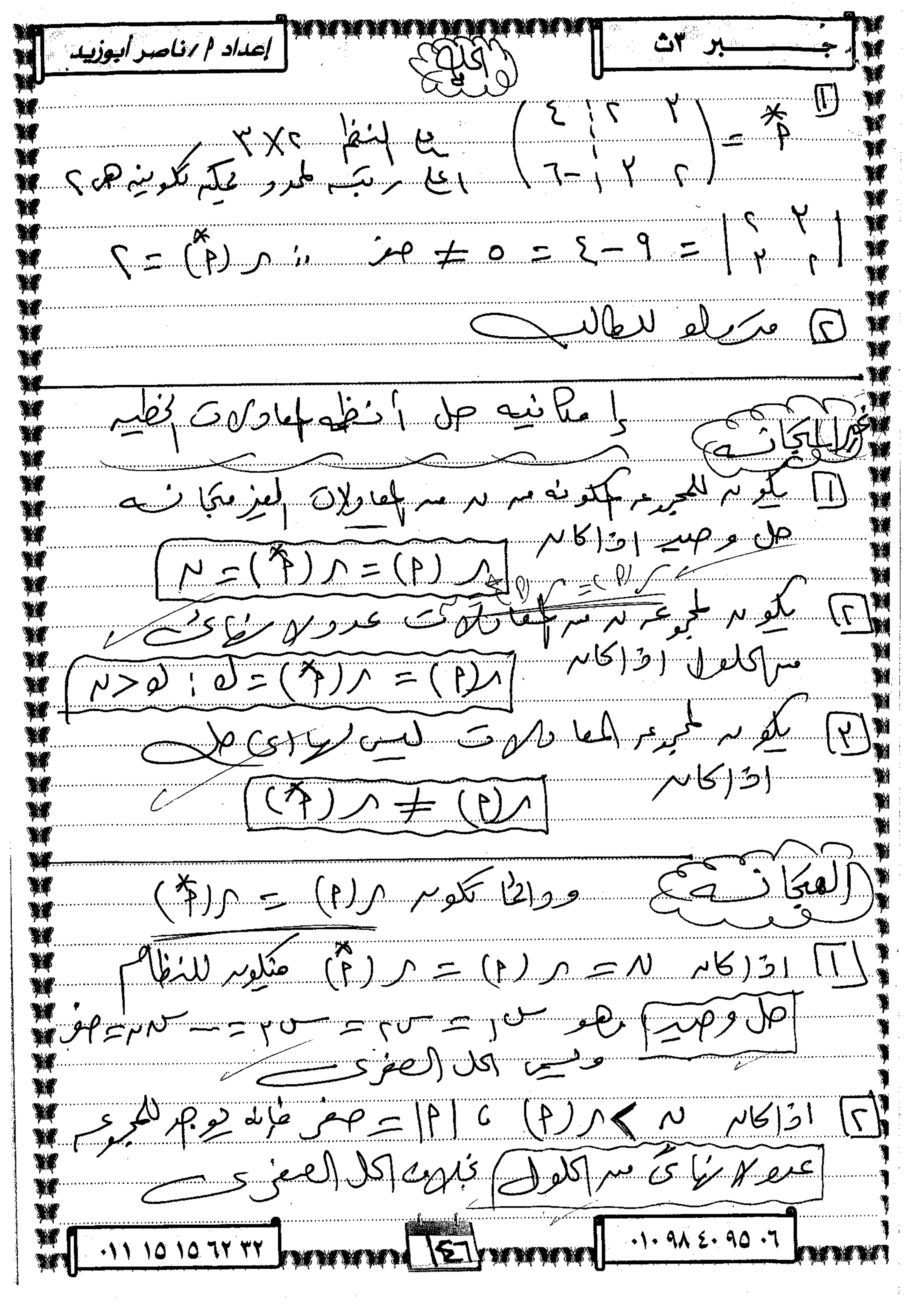
① $$أ^* = \begin{pmatrix} ٢ & ٢ & | & ٧ \\ ٢ & ١- & | & ٥ \\ ١ & ١- & | & ١ \end{pmatrix}$$

② $$أ^* = \begin{pmatrix} ٢ & ٢ & ١- & | & ٤ \\ ١ & ١ & ١ & | & ٢ \\ ١ & ٠ & ١- & | & ٠ \end{pmatrix}$$

مثال ٦: أوجد رتبة المصفوفة الموسعة لأنظمة المعادلات

① ٢س + ٢ص = ٤ ، ٣س + ٢ص = -٦

② ٢س - ٥ص = ٢ ، ٩س + ١٥ص = ١٠



إعداد م / ناصر ابوزيد

الحل

(١) $أ^* = \begin{pmatrix} ٣ & ٢ & | & ٤ \\ ٢ & ٣ & | & -٦ \end{pmatrix}$

∵ النظم ٢×٣ ∴ أعلى رتبة لمحدد يمكن تكوينه هي ٢

$\begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix} = ٩ - ٤ = ٥ \neq$ صفر ∴ ر(أ*) = ٢

(٢) متروك للطالب

[غير المتجانسة] إمكانية حل أنظمة المعادلات الخطية

(١) يكون للمجموعة المكونة من ن من المعادلات الغير متجانسة حل وحيد إذا كان

ر(أ) = ر(أ*) = ن

(٢) يكون للمجموعة من المعادلات عدد لا نهائي من الحلول إذا كان

ر(أ) = ر(أ*) = ك ؛ ك < ن

(٣) يكون للمجموعة المعادلات ليس لها أي حل إذا كان

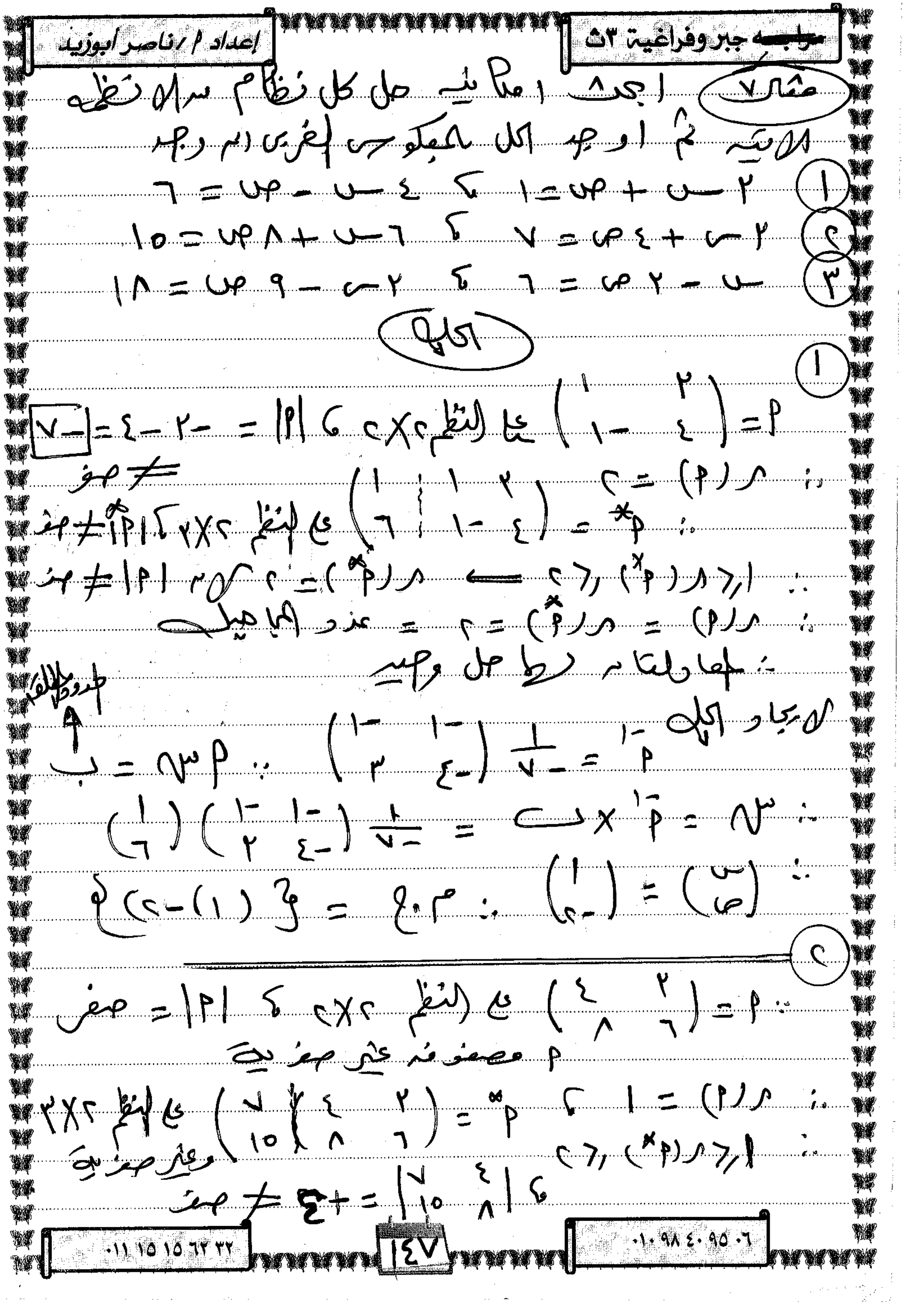
ر(أ) ≠ ر(أ*)

المتجانسة

ودائماً تكون ر(أ) = ر(أ*)

(١) إذا كان ن = ر(أ) = ر(أ*) فيكون للنظام **حل وحيد** وهو س١ = س٢ = س٣ = ... = سن = صفر ويسمى الحل الصفري

(٢) إذا كان ن > ر(أ) ، |أ| = صفر فإنه يوجد للمجموعة **عدد لا نهائي من الحلول بخلاف الحل الصفري**



إعداد أ/ ناصر ابوزيد

مثال ٧ ابحث امكانية حل كل نظام من الأنظمة الآتية ثم اوجد الحل مستخدماً المعكوس الضربي إن وجد

(١) ٢س + ص = ١ ، ٤س − ص = ٦

(٢) ٢س + ٤ص = ٧ ، ٦س + ٨ص = ١٥

(٣) س − ٢ص = ٦ ، ٢س − ٩ص = ١٨

الحل

(١)

أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & -١ \end{pmatrix}$ على النظم ٢×٢ ، |أ| = −٢ − ٤ = **−٧** ≠ صفر

∴ ر(أ) = ٢

∴ أ* = $\begin{pmatrix} ٢ & ١ & ١ \\ ٤ & -١ & ٦ \end{pmatrix}$ على النظم ٢×٣ ، |أ| ≠ صفر

∴ ١ ≤ ر(أ*) ≤ ٢ ⟵ ر(أ*) = ٢ لأن |أ| ≠ صفر

∴ ر(أ) = ر(أ*) = ٢ = عدد المجاهيل

∴ المعادلات لها حل وحيد

لإيجاد الحل

أ^{-١} = $\frac{١}{-٧}$ $\begin{pmatrix} -١ & -١ \\ -٤ & ٢ \end{pmatrix}$ ∵ أ س = ب

∴ س = أ^{-١} × ب = $\frac{١}{-٧}$ $\begin{pmatrix} -١ & -١ \\ -٤ & ٢ \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} ١ \\ ٦ \end{pmatrix}$

∴ $\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ١ \\ -٢ \end{pmatrix}$ ∴ م.ح = {(١ ، −٢)}

حدود المطلق

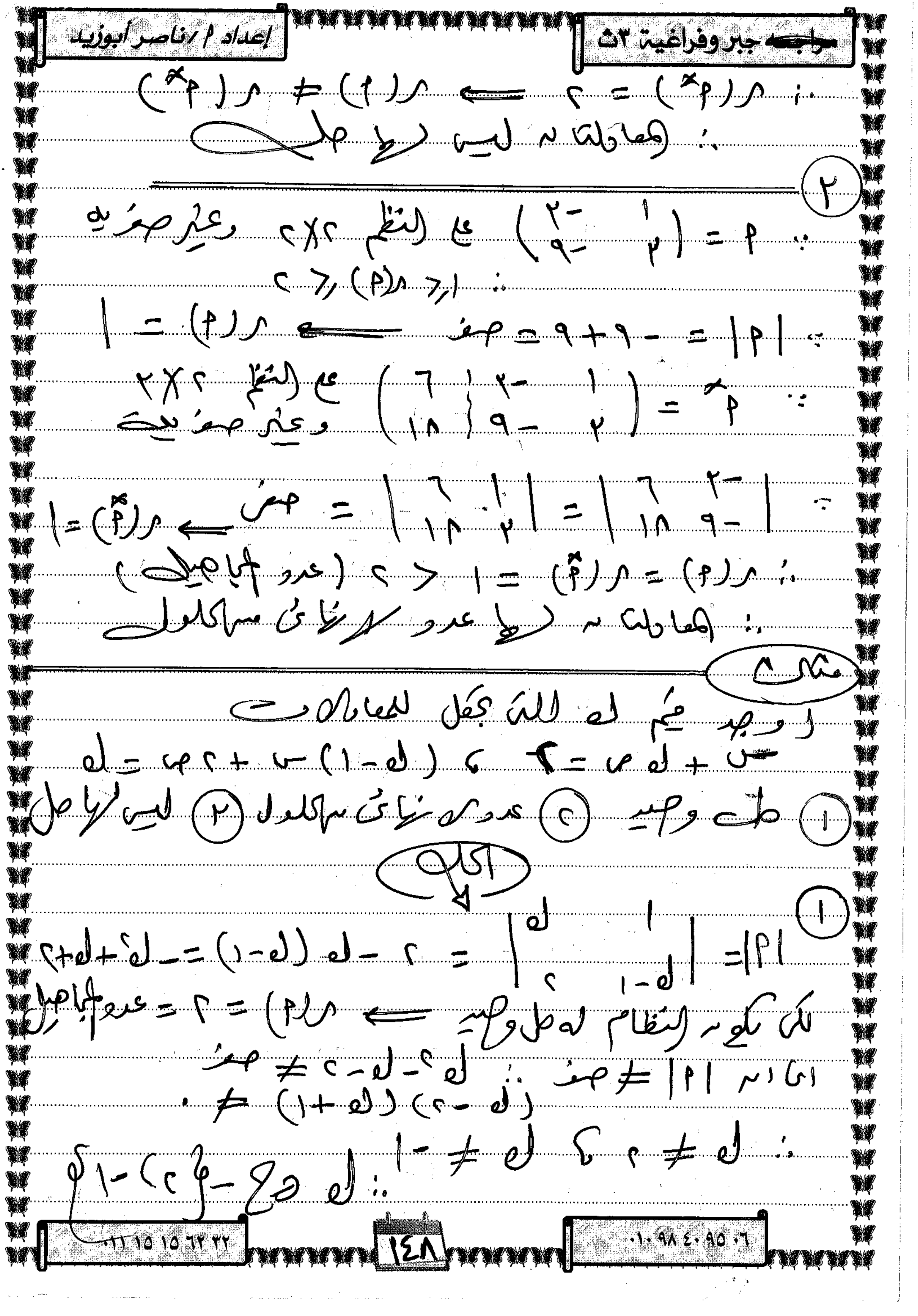
(٢)

∵ أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ٤ \\ ٦ & ٨ \end{pmatrix}$ على النظم ٢×٢ ، |أ| = صفر

أ مصفوفة غير صفرية

∴ ر(أ) = ١ ، أ* = $\begin{pmatrix} ٢ & ٤ & ٧ \\ ٦ & ٨ & ١٥ \end{pmatrix}$ على النظم ٢×٣ وغير صفرية

∴ ١ ≤ ر(أ*) ≤ ٢ ، $\begin{vmatrix} ٤ & ٧ \\ ٨ & ١٥ \end{vmatrix}$ = +٤ ≠ صفر



∴ ر(أ*) = ٢ ⟸ ر(أ) ≠ ر(أ*)

∴ المعادلات ليس لها حل

(٢)

∵ أ = $\begin{pmatrix} ١ & -٢ \\ ٢ & -٩ \end{pmatrix}$ ∈ النظم ٢×٢ وغير صفرية

∴ ١ ≤ ر(أ) ≤ ٢

∵ |أ| = -٩ + ٩ = صفر ⟸ ر(أ) = ١

∵ أ* = $\left(\begin{array}{cc|c} ١ & -٢ & ٦ \\ ٢ & -٩ & ١٨ \end{array}\right)$ ∈ النظم ٢×٣ وغير صفرية

∵ $\begin{vmatrix} -٢ & ٦ \\ -٩ & ١٨ \end{vmatrix}$ = $\begin{vmatrix} ١ & ٦ \\ ٢ & ١٨ \end{vmatrix}$ = صفر ⟸ ر(أ*) = ١

∴ ر(أ) = ر(أ*) = ١ < ٢ (عدد المجاهيل)

∴ المعادلات لها عدد لا نهائي من الحلول

مثال ٨

أوجد قيم ك التي تجعل للمعادلات

س + ك ص = ٢ ، (ك - ١) س + ٢ص = ك

(١) حل وحيد (٢) عدد لا نهائي من الحلول (٣) ليس لها حل

الحل

(١) |أ| = $\begin{vmatrix} ١ & ك \\ ك-١ & ٢ \end{vmatrix}$ = ٢ - ك(ك - ١) = -ك² + ك + ٢

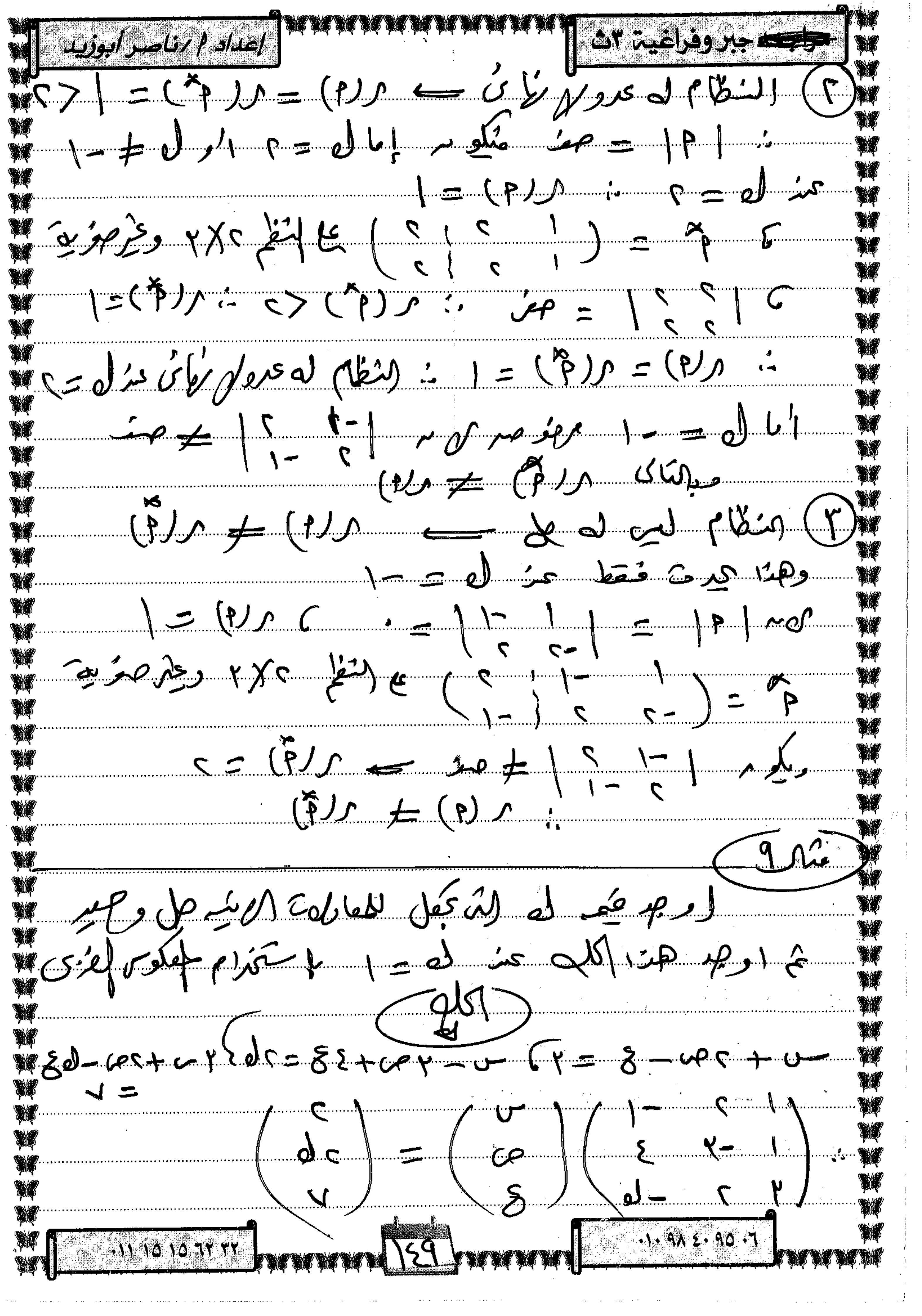
لكي يكون النظام له حل وحيد ⟸ ر(أ) = ٢ = عدد المجاهيل

أي أن |أ| ≠ صفر ∴ ك² - ك - ٢ ≠ صفر

(ك - ٢)(ك + ١) ≠ ٠

∴ ك ≠ ٢ ، ك ≠ -١

∴ ك ∈ ح - {٢ ، -١}



(٢) النظام له عدد لا نهائي من الحلول ⟸ $ر(أ) = ر(أ^*) = ١ < ٢$

∴ $|أ| =$ صفر ∴ إما ك = ٢ أو ك ≠ −١

عند ك = ٢ ∴ ر(أ) = ١

، $أ^* = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & | & ٢ \\ ١ & ٢ & | & ٢ \end{pmatrix}$ من النظم ٢×٣ وغير صفرية

، $\begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ٢ \end{vmatrix} =$ صفر ∴ $ر(أ^*) < ٢$ ∴ $ر(أ^*) = ١$

∴ $ر(أ) = ر(أ^*) = ١$ ∴ النظام له عدد لا نهائي من الحلول عند ك = ٢

أما ك = −١ محدد صغير $\begin{vmatrix} −١ & ٢ \\ ٢ & −١ \end{vmatrix} \neq$ صفر

وبالتالي $ر(أ^*) \neq ر(أ)$

(٣) النظام ليس له حل ⟸ $ر(أ) \neq ر(أ^*)$

وهذا يحدث فقط عند ك = −١

لأن $|أ| = \begin{vmatrix} ١ & −١ \\ −٢ & ٢ \end{vmatrix} = ٠$ ، ر(أ) = ١

$أ^* = \begin{pmatrix} ١ & −١ & | & ٢ \\ −٢ & ٢ & | & −١ \end{pmatrix}$ من النظم ٢×٣ وغير صفرية

ويكون $\begin{vmatrix} −١ & ٢ \\ ٢ & −١ \end{vmatrix} \neq$ صفر ⟸ $ر(أ^*) = ٢$

∴ $ر(أ) \neq ر(أ^*)$

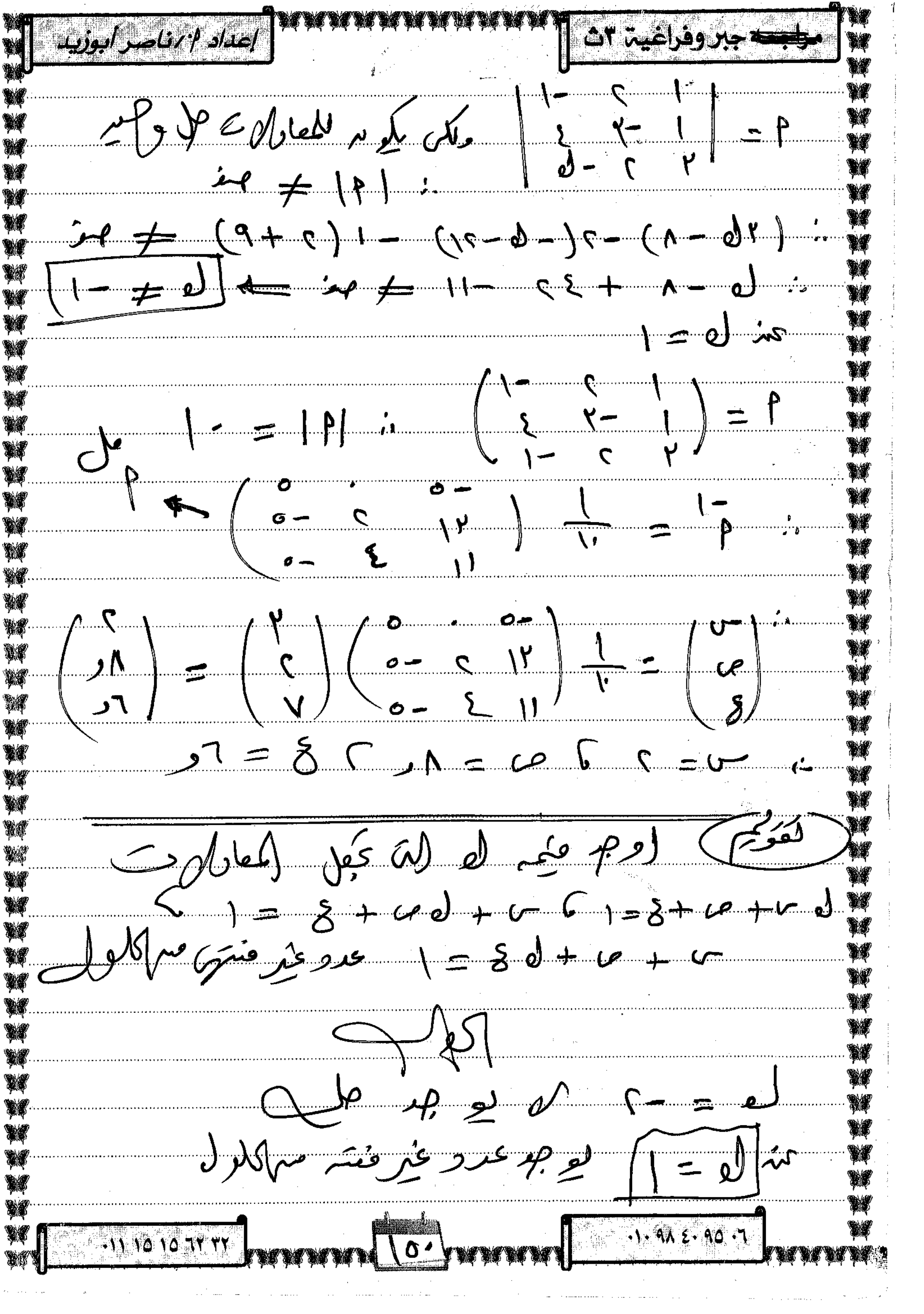
مثال ٩

أوجد قيمة ك التي تجعل للمعادلات الآتية حل وحيد ثم أوجد هذا الحل عند ك = ١ باستخدام المعكوس الضربي

الحل

س + ٢ص − ع = ٢ ، س − ٢ص + ٤ع = ٢ك ، ٢س + ٢ص − كع = ٧

$$\begin{pmatrix} ١ & ٢ & −١ \\ ١ & −٢ & ٤ \\ ٢ & ٢ & −ك \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ \\ ٢ك \\ ٧ \end{pmatrix}$$



أ = | ١ ٢ −١ ، ١ −٢ ٤ ، ٢ ٢ ك − ٢ | ولكى يكون للمعادلات حل وحيد

∴ |أ| ≠ صفر

∴ (٢ك − ٨) − ٢(− ك − ١٢) − ١(٢ + ٩) ≠ صفر

∴ ك − ٨ + ٢٤ك − ١١ ≠ صفر ⟸ ك ≠ −١

عند ك = ١

أ = (١ ٢ −١ ، ١ −٢ ٤ ، ٢ ٢ −١)   ∴ |أ| = ١٠   حل

∴ أ^−١ = ١/١٠ (−٥ ٠ ٥ ، ١٢ ٢ −٥ ، ١١ ٤ −٥) ⟵ أ

∴ (س ، ص ، ع) = ١/١٠ (−٥ ٠ ٥ ، ١٢ ٢ −٥ ، ١١ ٤ −٥) (٣ ، ٢ ، ٧) = (٢ ، ٨و ، ٦و)

∴ س = ٢ ، ص = ٨و ، ع = ٦و

تقويم: اوجد قيمة ك التى تجعل المعادلات

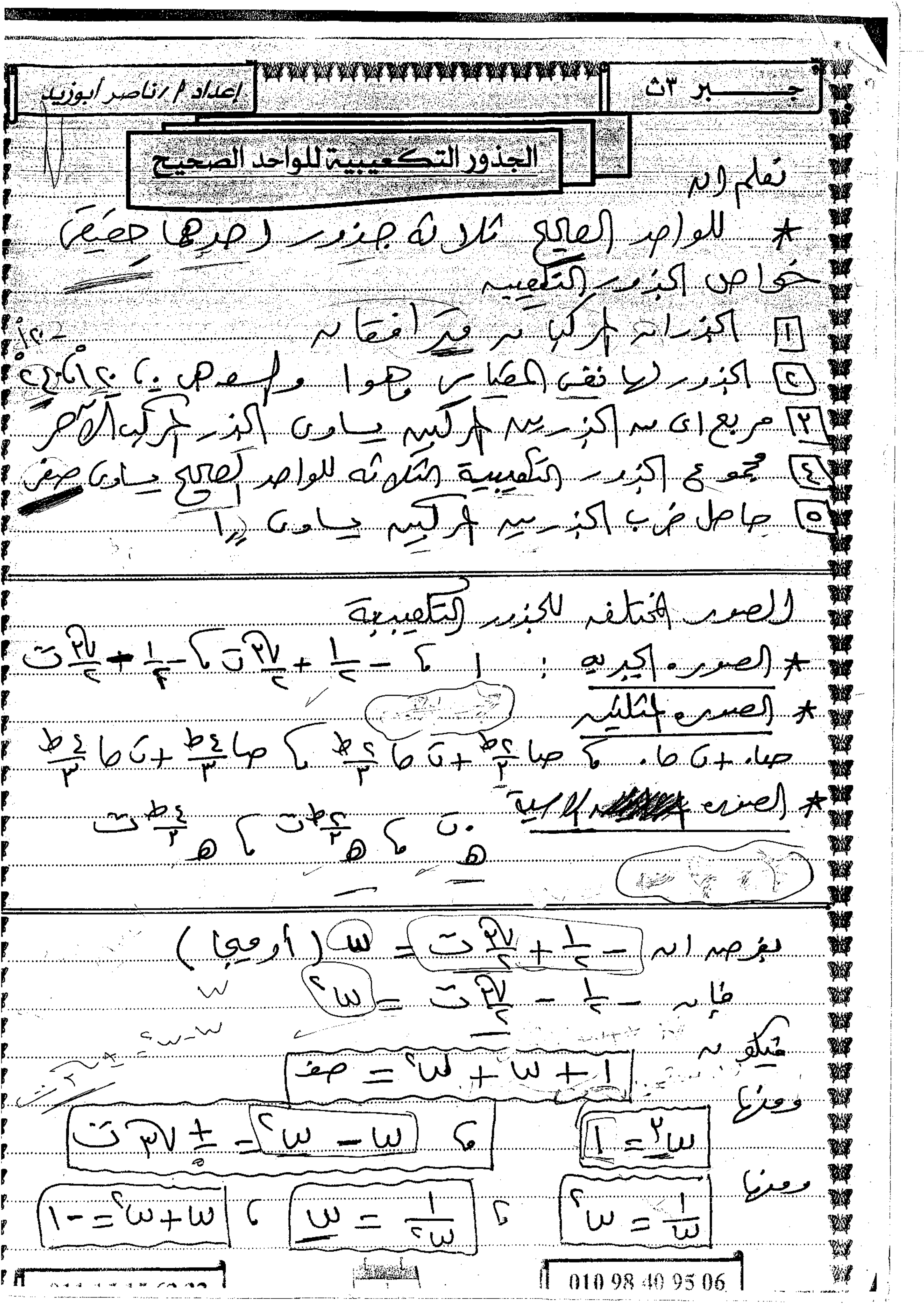
ك س + ص + ع = ١ ، س + ك ص + ع = ١

س + ص + ك ع = ١   عدد غير منتهى من الحلول

الحل

ك = −٢ لا يوجد حل

ك = ١ يوجد عدد غير منتهى من الحلول



إعداد أ/ ناصر أبوزيد

الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

نعلم أن

* للواحد الصحيح ثلاثة جذور أحدها حقيقي

خواص الجذور التكعيبية

1. الجذران المركبان مترافقان ω ، ω^2
2. الجذور لها نفس المقياس وهو الواحد والسعة ٠ ، $\frac{2\pi}{3}$ ، $\frac{4\pi}{3}$
3. مربع أي من الجذرين المركبين يساوي الجذر المركب الآخر
4. مجموع الجذور التكعيبية الثلاثة للواحد الصحيح يساوي صفر
5. حاصل ضرب الجذرين المركبين يساوي ١

الصور المختلفة للجذور التكعيبية

* الصورة الجبرية : 1 ، $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ، $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$
* الصورة المثلثية
  جتا ٠ + ت جا ٠ ، جتا $\frac{2\pi}{3}$ + ت جا $\frac{2\pi}{3}$ ، جتا $\frac{4\pi}{3}$ + ت جا $\frac{4\pi}{3}$
* الصورة الأسية
  e^{0} ، $e^{\frac{2\pi}{3}i}$ ، $e^{\frac{4\pi}{3}i}$

نفرض أن $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i = \omega$ (أوميجا)

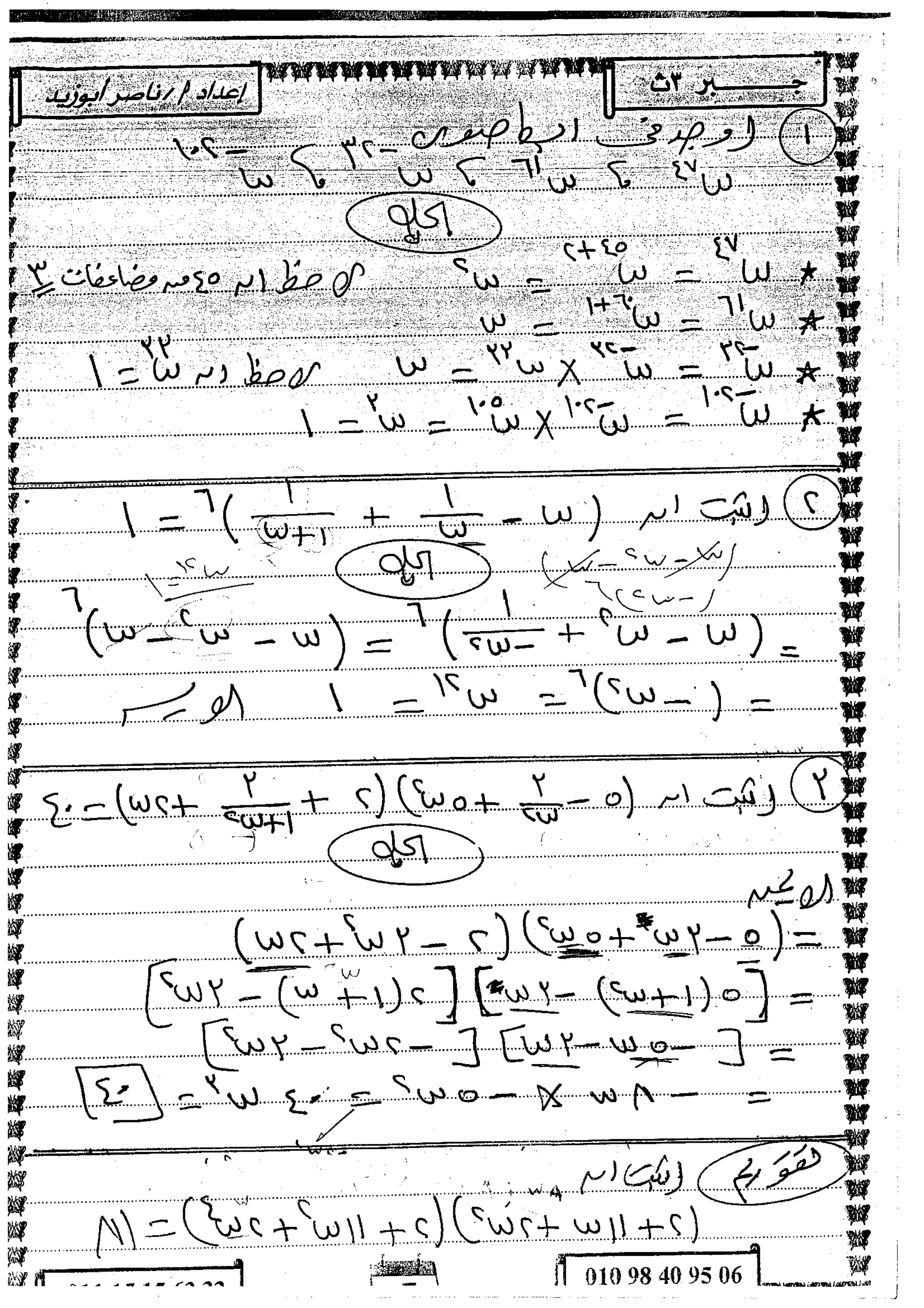
فإن $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i = \omega^2$

فيكون

$$1+\omega+\omega^2 = 0$$

ومنها $\omega^3 = 1$ ، $\omega-\omega^2 = \pm\sqrt{3}\,i$

ومنها $\frac{1}{\omega}=\omega^2$ ، $\frac{1}{\omega^2}=\omega$ ، $\omega+\omega^2=-1$



(١) أوجد في أبسط صورة: ω^{47} ، ω^{61} ، ω^{-34} ، ω^{-102}

الحل

★ $\omega^{47} = \omega^{45+2} = \omega^{2}$ لاحظ أن ٤٥ من مضاعفات ٣

★ $\omega^{61} = \omega^{60+1} = \omega$

★ $\omega^{-34} = \omega^{-34} \times \omega^{36} = \omega^{2}$ لاحظ أن $\omega^{36} = 1$

★ $\omega^{-102} = \omega^{-102} \times \omega^{105} = \omega^{3} = 1$

(٢) أثبت أن $\left(\omega - \frac{1}{\omega} + \frac{1}{1+\omega}\right)^{6} = 1$

الحل

$= \left(\omega - \omega^{2} + \frac{1}{-\omega^{2}}\right)^{6} = \left(\omega - \omega^{2} - \omega\right)^{6}$

$= (-\omega^{2})^{6} = \omega^{12} = 1$ الأيسر

(٢) أثبت أن $\left(5 - \frac{2}{\omega^{2}} + 5\omega^{2}\right)\left(2 + \frac{2}{1+\omega^{2}} + 2\omega\right) = 40$

الحل

الأيمن

$= (5 - 2\omega + 5\omega^{2})(2 - 2\omega^{2} + 2\omega)$

$= [5(1+\omega^{2}) - 2\omega][2(1+\omega) - 2\omega^{2}]$

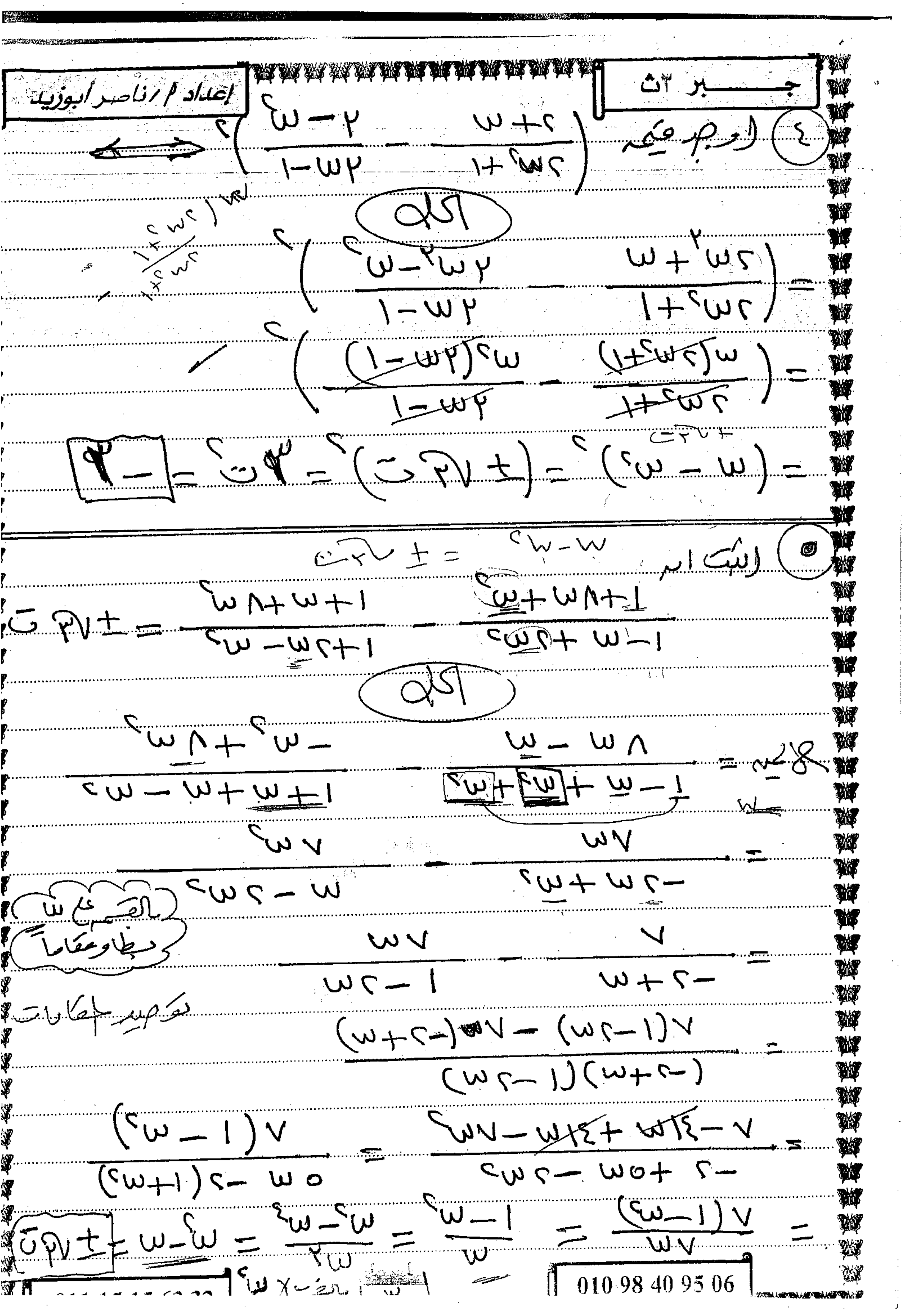
$= [-5\omega - 2\omega][-2\omega^{2} - 2\omega^{2}]$

$= -8\omega \times -5\omega^{2} = 40\omega^{3} = \boxed{40}$

تقويم: أثبت أن

$(2 + 11\omega + 2\omega^{2})(2 + 11\omega^{2} + 2\omega^{4}) = 81$

010 98 40 95 06



جبر ٣ث

إعداد م / ناصر أبوزيد

(٤) أوجد قيمة

$$\left(\frac{2+\omega}{2\omega^2+1}-\frac{2-\omega^2}{2\omega-1}\right)^2$$

الحل

$$=\left(\frac{2\omega^3+\omega}{2\omega^2+1}-\frac{2\omega^3-\omega^2}{2\omega-1}\right)^2$$

$$=\left(\frac{\omega(2\omega^2+1)}{2\omega^2+1}-\frac{\omega^2(2\omega-1)}{2\omega-1}\right)^2$$

$$=(\omega-\omega^2)^2=(\pm\sqrt{3}\,i)^2=3i^2=\boxed{-3}$$

(٥) أثبت أن

$$\frac{1+8\omega+\omega^2}{1-\omega+2\omega^2}-\frac{1+\omega+8\omega^2}{1+2\omega-\omega^2}=\pm\sqrt{3}\,i$$

الحل

$$\text{الأيمن}=\frac{8\omega-\omega}{1+\omega^2-\omega+\omega^2}-\frac{-\omega^2+8\omega^2}{1+\omega+\omega-\omega^2}$$

$$=\frac{7\omega}{-2\omega+\omega^2}-\frac{7\omega^2}{\omega-2\omega^2}$$

بالضرب × ω بسطاً ومقاماً

$$=\frac{7}{-2+\omega}-\frac{7\omega}{1-2\omega}$$

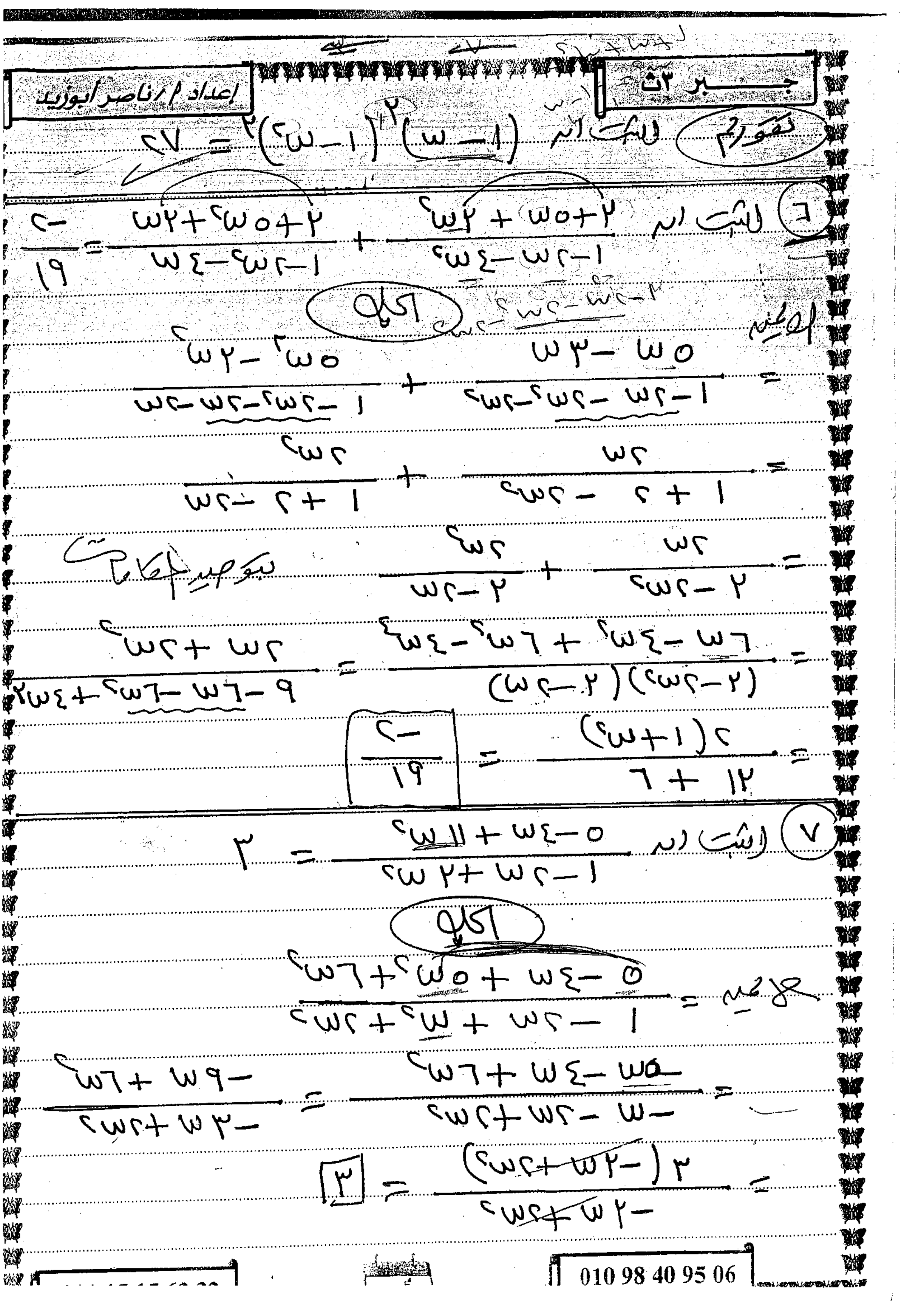
توحيد المقامات

$$=\frac{7(1-2\omega)-7\omega(-2+\omega)}{(-2+\omega)(1-2\omega)}$$

$$=\frac{7-14\omega+14\omega-7\omega^2}{-2+5\omega-2\omega^2}=\frac{7(1-\omega^2)}{5\omega-2(1+\omega^2)}$$

$$=\frac{7(1-\omega^2)}{7\omega}=\frac{1-\omega^2}{\omega}=\frac{\omega^3-\omega^2}{\omega}=\omega^2-\omega=\pm\sqrt{3}\,i$$

010 98 40 95 06



إعداد أ/ ناصر أبوزيد

تقويم ٢ اثبت أن $(١-\omega)^{٣}(١-\omega^{٢})^{٣} = ٢٧$

(٦) اثبت أن $\frac{٢+٥\omega+٢\omega^{٢}}{١-٢\omega-٤\omega^{٢}} + \frac{٢+٥\omega^{٢}+٢\omega}{١-٢\omega^{٢}-٤\omega} = \frac{-٢}{١٩}$

الحل

$= \frac{٥\omega-٣\omega}{١-٢\omega-٢\omega^{٢}-٢\omega^{٢}} + \frac{٥\omega^{٢}-٣\omega^{٢}}{١-٢\omega^{٢}-٢\omega-٢\omega}$

$= \frac{٢\omega}{١+٢-٢\omega^{٢}} + \frac{٢\omega^{٢}}{١+٢-٢\omega}$

$= \frac{٢\omega}{٣-٢\omega^{٢}} + \frac{٢\omega^{٢}}{٣-٢\omega}$ بتوحيد المقامات

$= \frac{٦\omega-٤\omega^{٢}+٦\omega^{٢}-٤\omega^{٣}}{(٣-٢\omega^{٢})(٣-٢\omega)} = \frac{٢\omega+٢\omega^{٢}}{٩-٦\omega-٦\omega^{٢}+٤\omega^{٣}}$

$= \frac{٢(١+\omega^{٢})}{١٢+٦} = \boxed{\frac{-٢}{١٩}}$

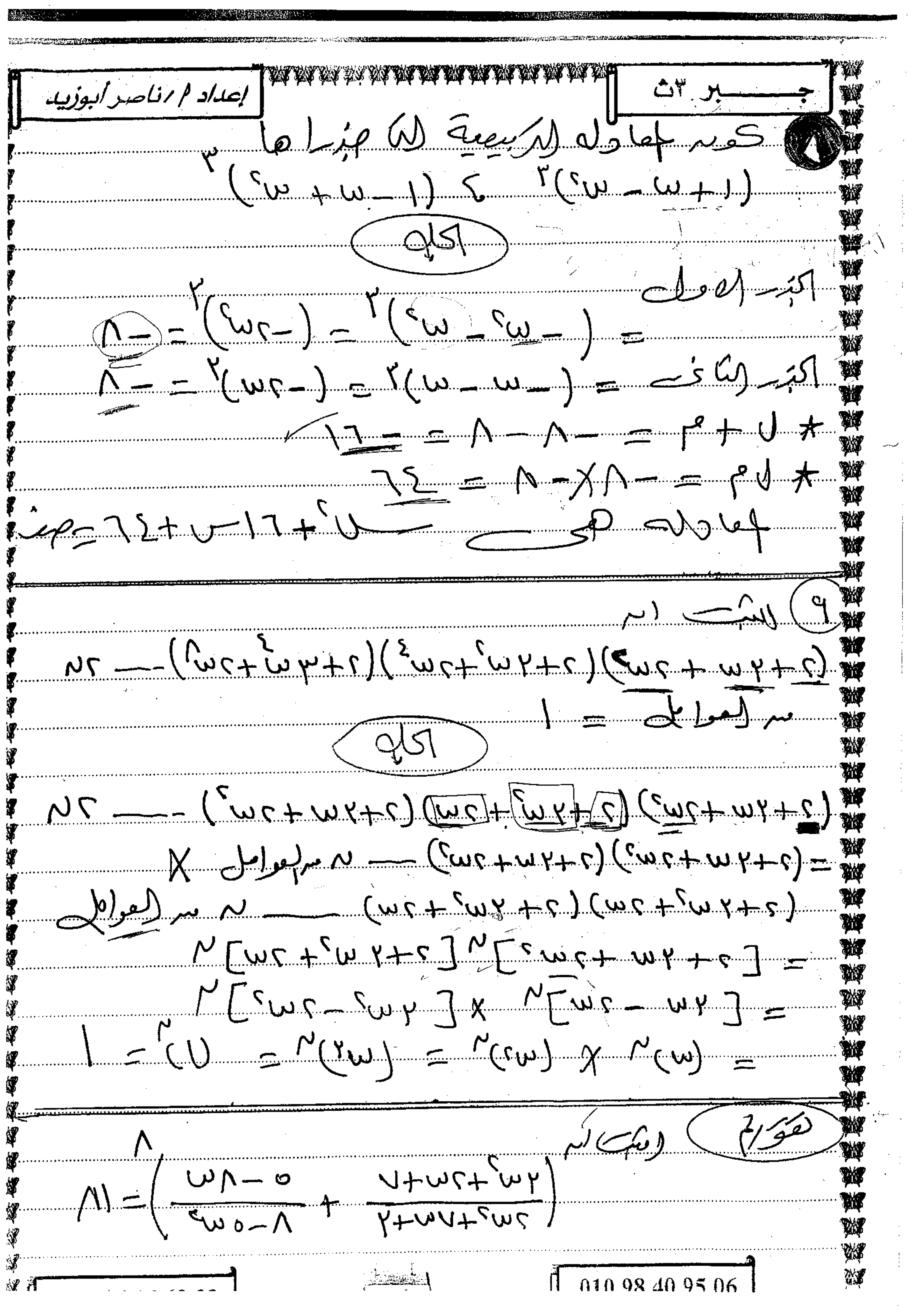
(٧) اثبت أن $\frac{٥-٤\omega+١١\omega^{٢}}{١-٢\omega+٢\omega^{٢}} = ٣$

الحل

$= \frac{٥-٤\omega+٥\omega^{٢}+٦\omega^{٢}}{١-٢\omega+\omega^{٢}+٢\omega^{٢}}$

$= \frac{-٥\omega-٤\omega+٦\omega^{٢}}{-\omega-٢\omega+٢\omega^{٢}} = \frac{-٩\omega+٦\omega^{٢}}{-٣\omega+٢\omega^{٢}}$

$= \frac{٣(-٣\omega+٢\omega^{٢})}{-٣\omega+٢\omega^{٢}} = \boxed{٣}$



٨ كون المعادلة التربيعية التي جذراها $(1+\omega-\omega^2)^3$ ، $(1-\omega+\omega^2)^3$

الحل

الجذر الأول $= (-\omega^2-\omega^2)^3 = (-2\omega^2)^3 = -8$

الجذر الثاني $= (-\omega-\omega)^3 = (-2\omega)^3 = -8$

* $L + M = -8 - 8 = -16$
* $L M = -8 \times -8 = 64$

المعادلة هي: $x^2 + 16x + 64 = 0$

---

٩ اثبت أن

$(2+2\omega+3\omega^2)(2+2\omega^2+3\omega^4)(2+3\omega^4+2\omega^2) \ldots 2n$

من العوامل $= 1$

الحل

$(2+2\omega+3\omega^2)(2+2\omega^2+3\omega)(2+2\omega+3\omega^2)\ldots 2n$

$= (2+2\omega+3\omega^2)(2+2\omega+3\omega^2) \ldots$ ن من العوامل $\times$

$(2+2\omega^2+3\omega)(2+2\omega^2+3\omega) \ldots$ ن من العوامل

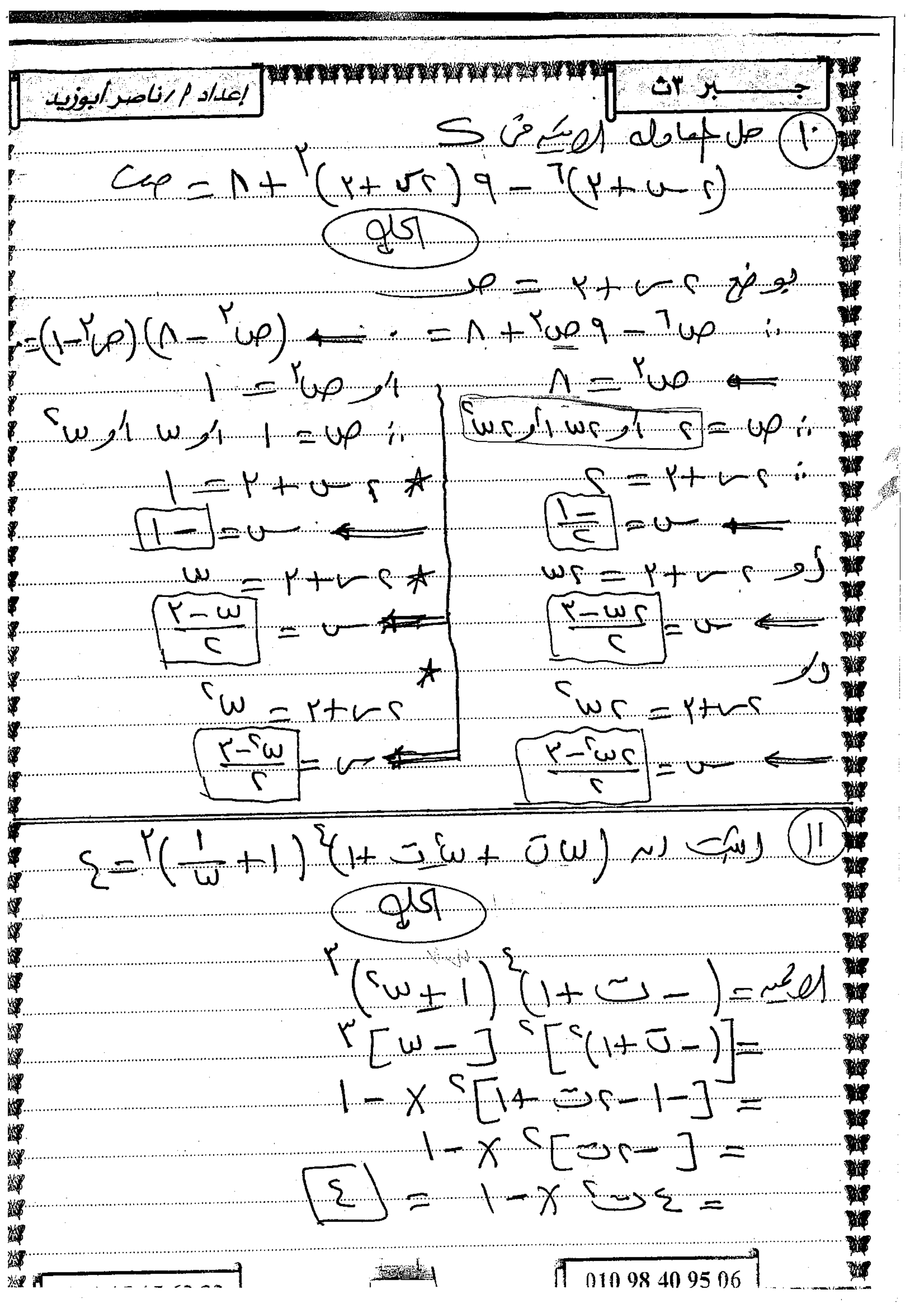
$= [2+2\omega+3\omega^2]^n [2+2\omega^2+3\omega]^n$

$= [-2\omega^2+3\omega^2]^n \times [-2\omega+3\omega]^n$

$= (\omega^2)^n \times (\omega)^n = (\omega^3)^n = 1^n = 1$

تقويم اثبت أن

$$\left(\frac{2\omega^2+3\omega+7}{3\omega^2+7\omega+2} + \frac{5-8\omega}{8-5\omega^2}\right)^8 = 81$$



إعداد أ/ ناصر أبوزيد

(١٠) حل المعادلة الآتية في ك

$(٢س + ٢)^٦ - ٩(٢س + ٢)^٣ + ٨ = صفر$

الحل

بوضع $٢س + ٢ = ص$

$\therefore ص^٦ - ٩ص^٣ + ٨ = ٠ \Leftarrow (ص^٣ - ٨)(ص^٣ - ١) = ٠$

$\Leftarrow ص^٣ = ٨$

$\therefore ص = ٢$ أو ٢ω أو $٢\omega^٢$

$\therefore ٢س + ٢ = ٢$

$\Leftarrow س = \frac{١}{٢}$

أو $٢س + ٢ = ٢\omega$

$\Leftarrow س = \frac{٢\omega - ٢}{٢}$

أو $٢س + ٢ = ٢\omega^٢$

$\Leftarrow س = \frac{٢\omega^٢ - ٢}{٢}$

أو $ص^٣ = ١$

$\therefore ص = ١$ أو ω أو $\omega^٢$

* $٢س + ٢ = ١$

$\Leftarrow س = -١$

* $٢س + ٢ = \omega$

$\Leftarrow س = \frac{\omega - ٢}{٢}$

* $٢س + ٢ = \omega^٢$

$\Leftarrow س = \frac{\omega^٢ - ٢}{٢}$

---

(١١) اثبت أن $(\omega ت + \omega^٢ ت + ١)^٤ (١ + \frac{١}{\omega})^٣ = ٤$

الحل

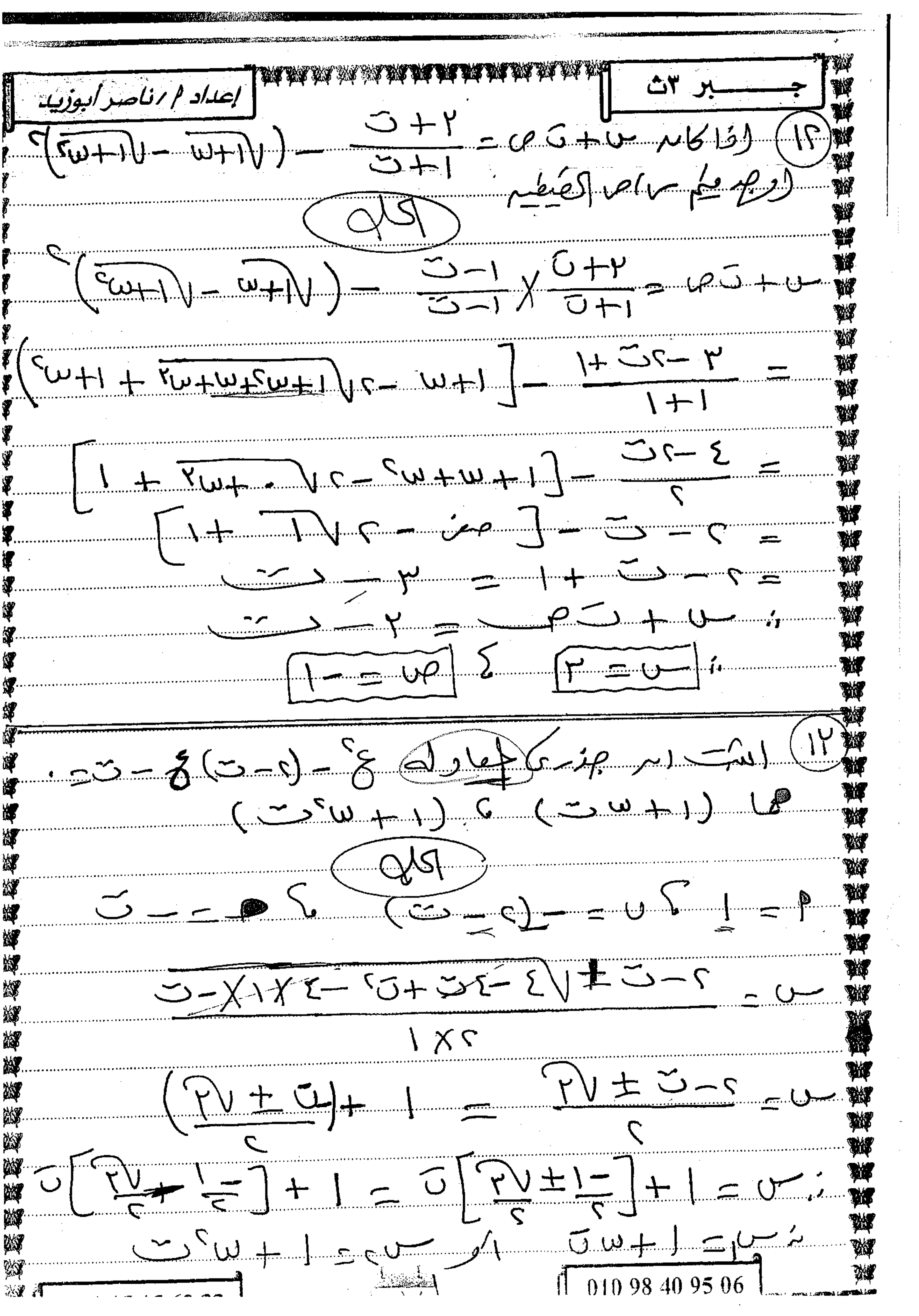
$الطرف = (-ت + ١)^٤ (١ + \omega^٢)^٣$

$= [(-ت + ١)^٢]^٢ [-\omega]^٣$

$= [-١ - ٢ت + ١]^٢ \times -١$

$= [-٢ت]^٢ \times -١$

$= ٤ت^٢ \times -١ = ٤$



إعداد أ / ناصر أبوزيد

(١٢) إذا كان س + ت ص = (٢ + ت)/(١ + ت) − (√(١ + ω) − √(١ + ω²))²
أوجد قيم س، ص الحقيقية

الحل

س + ت ص = (٢ + ت)/(١ + ت) × (١ − ت)/(١ − ت) − (√(١ + ω) − √(١ + ω²))²

= (٣ − ٢ت + ١)/(١ + ١) − [١ + ω − ٢√(١ + ω² + ω + ω³) + ١ + ω²]

= (٤ − ٢ت)/٢ − [١ + ω + ω² − ٢√(٠ + ١) + ١]

= ٢ − ت − [صفر − ٢√١ + ١]

= ٢ − ت + ١ = ٣ − ت

∴ س + ت ص = ٣ − ت

∴ س = ٣ ، ص = −١

---

(١٢) أثبت أن جذري المعادلة ع² − (٢ − ت) ع − ت = ٠
هما (١ + ω ت) ، (١ + ω² ت)

الحل

أ = ١ ، ب = −(٢ − ت) ، جـ = −ت

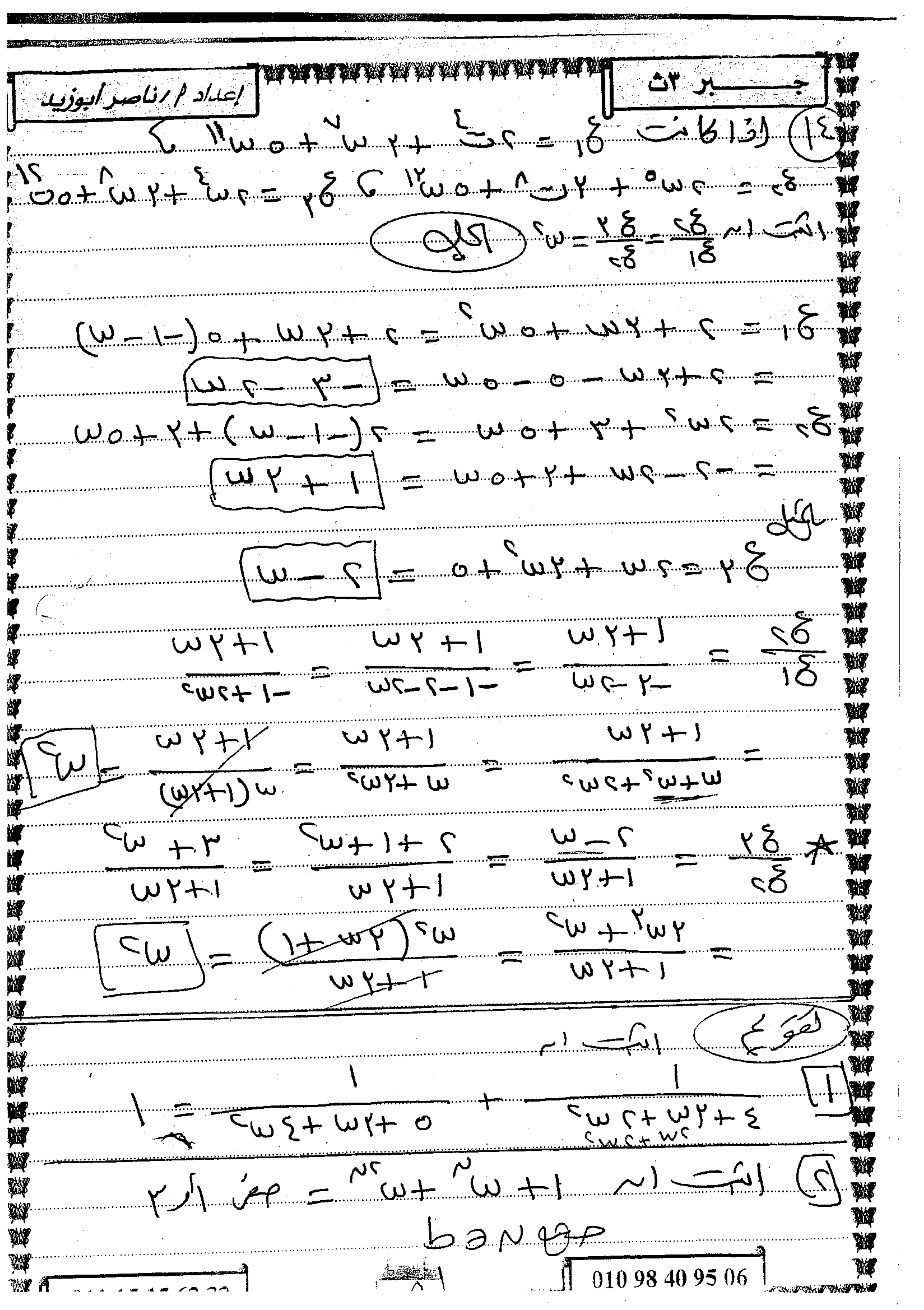
س = [٢ − ت ± √(٤ − ٤ت + ت² − ٤ × ١ × −ت)] / (٢ × ١)

س = (٢ − ت ± √٣)/٢ = ١ + ((−ت ± √٣)/٢)

∴ س = ١ + [(−١/٢) ± (√٣/٢)] ت = ١ + [(−١/٢) ∓ (√٣/٢)] ت

∴ س₁ = ١ + ω ت ، س₂ = ١ + ω² ت

010 98 40 95 06



إعداد أ / ناصر أبوزيد

(١٤) إذا كانت $ع_1 = ٢ت^٤ + ٢س^٧ + ٥س^{١١}$ ،

$ع_2 = ٢س^٥ + ٢ت^٨ + ٥س^{١٢}$ ، $ع_3 = ٢س^٤ + ٢س^٨ + ٥س^{١٢}$

أثبت أن $\frac{ع_2}{ع_1} = \frac{ع_3}{ع_2} = س^٢$ — الحل

$ع_1 = ٢ + ٢س + ٥س^٢ = ٢ + ٢س + ٥(-١ - س)$

$= ٢ + ٢س - ٥ - ٥س = \boxed{-٣ - ٣س}$

$ع_2 = ٢س^٢ + ٣ + ٥س = ٢(-١ - س) + ٢ + ٥س$

$= -٢ - ٢س + ٢ + ٥س = \boxed{١ + ٢س}$

الحل

$ع_3 = ٢س + ٢س^٢ + ٥ = \boxed{٢ - س}$

$\frac{ع_2}{ع_1} = \frac{١ + ٢س}{-٢ - ٢س} = \frac{١ + ٢س}{-١ - ٢ - ٢س} = \frac{١ + ٢س}{-١ + ٢س^٢}$

$= \frac{١ + ٢س}{س + س^٢ + ٢س^٢} = \frac{١ + ٢س}{س + ٢س^٢} = \frac{١ + ٢س}{س(١ + ٢س)} = \boxed{س^٢}$

★ $\frac{ع_3}{ع_2} = \frac{٢ - س}{١ + ٢س} = \frac{٢ + ١ + س^٢}{١ + ٢س} = \frac{٣ + س^٢}{١ + ٢س}$

$= \frac{٢س^٣ + س^٢}{١ + ٢س} = \frac{س^٢(٢س + ١)}{١ + ٢س} = \boxed{س^٢}$

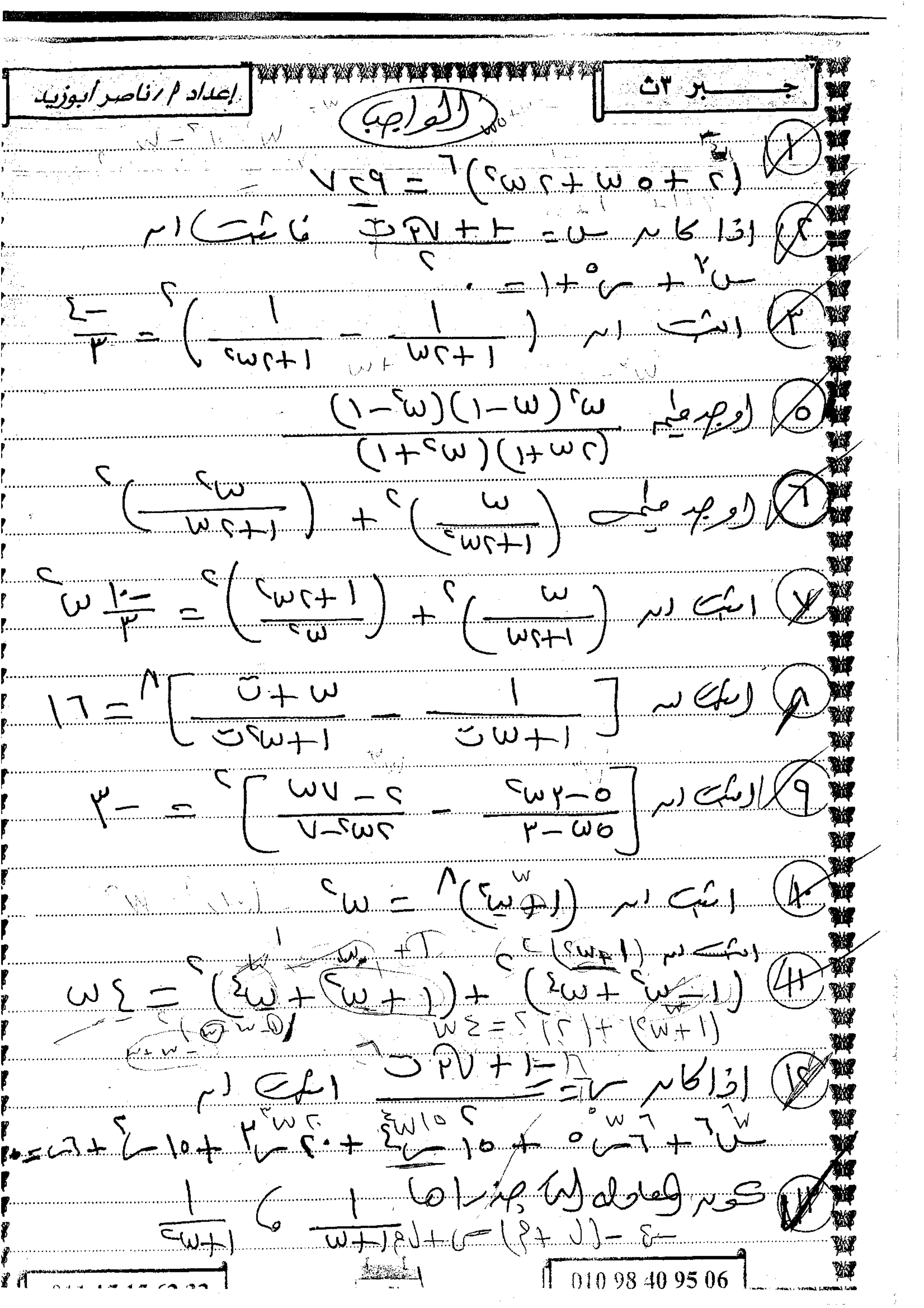
تقويم

أثبت أن

(١) $\frac{١}{٤ + ٢س + ٢س^٢} + \frac{١}{٥ + ٢س + ٤س^٢} = ١$

(٢) أثبت أن $١ + س^ن + س^{٢ن} = $ صفر أو ٣

010 98 40 95 06



إعداد أ/ ناصر أبوزيد

الواجب

(١) $(2 + 5\omega + 2\omega^2)^6 = 729$

(٢) إذا كان $س = \frac{-1 + \sqrt{3}\,ت}{2}$ فأثبت أن $س^2 + س^5 + 1 = 0$

(٣) أثبت أن $\left(\frac{1}{1+2\omega} - \frac{1}{1+2\omega^2}\right)^2 = \frac{-4}{3}$

(٥) أوجد قيمة $\frac{\omega^2(\omega-1)(\omega^2-1)}{(2\omega+1)(\omega^2+1)}$

(٦) أوجد قيمة $\left(\frac{\omega}{1+2\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega^2}{1+2\omega}\right)^2$

(٧) أثبت أن $\left(\frac{\omega}{1+2\omega}\right)^2 + \left(\frac{1+2\omega^2}{\omega^2}\right)^2 = \frac{-10}{3}\omega^2$

(٨) أثبت أن $\left[\frac{1}{1+\omega ت} - \frac{\omega + ت}{1+\omega^2 ت}\right]^8 = 16$

(٩) أثبت أن $\left[\frac{5-2\omega^2}{5\omega-3} - \frac{2-7\omega}{2\omega^2-7}\right]^2 = -3$

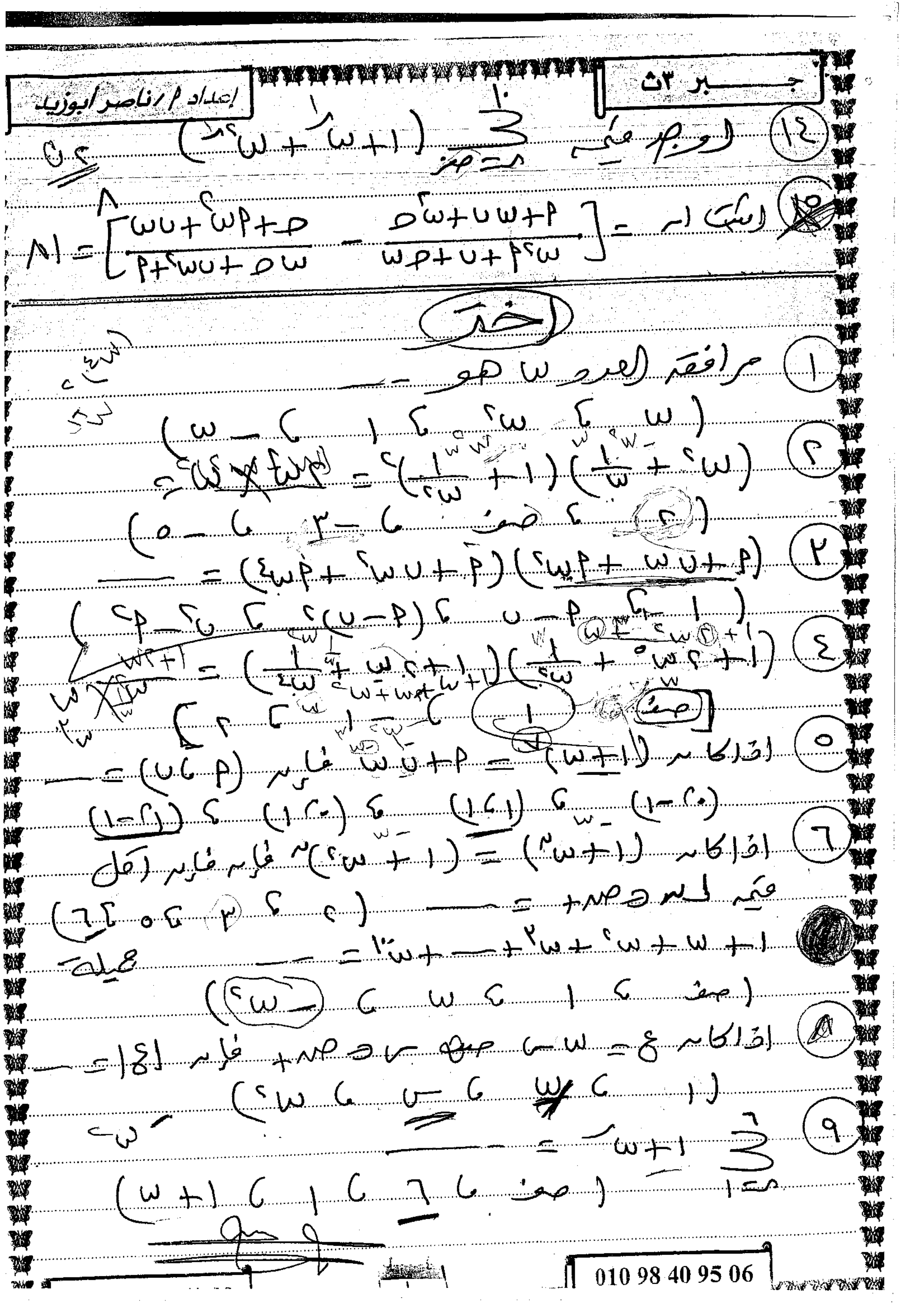
(١٠) أثبت أن $(1+\omega^2)^8 = \omega^2$

(١١) أثبت أن $(1-\omega^2+\omega^4)^2 + (1+\omega^2+\omega^4)^2 = 4\omega$

(١٢) إذا كان $س = \frac{-1+\sqrt{3}\,ت}{2}$ أثبت أن $س^6 + 6س^5 + 15س^4 + 20س^3 + 15س^2 + 6س + 1 = 0$

(١٣) كون المعادلة التي جذراها $\frac{1}{1+\omega}$ ، $\frac{1}{1+\omega^2}$

010 98 40 95 06



إعداد أ / ناصر ابوزيد

(١٤) أوجد قيمة $\sum_{ر=صفر}^{10} (1+\omega^{ر}+\omega^{2ر})$

(١٥) اثبت ان $\left[\frac{أ+ب\omega+ج\omega^2}{\omega^2 أ+ب+ج\omega} - \frac{ج+أ\omega^2+ب\omega}{ج\omega+ب\omega^2+أ}\right]^8 = 81$

اختر

(١) مرافق العدد ω هو ____
(ω ، ω^2 ، ١ ، $-\omega$)

(٢) $(\omega^2+\frac{1}{\omega})(1+\frac{1}{\omega^2})^2 = $ ____
(٢ ، صفر ، -3 ، -5)

(٣) $(أ+ب\omega+أ\omega^2)(أ+ب\omega^2+أ\omega^4) = $ ____
(١ ، أ $-$ ب ، (أ $-$ ب)^2 ، ب^2 $-$ أ^2)

(٤) $(1+2\omega^5+\frac{1}{\omega^2})(1+2\omega+\frac{1}{\omega^4}) = $ ____
[صفر ، ١ ، $-\omega$ ، ٢]

(٥) اذا كان $(1+\omega)^7 = أ+ب\omega$ فإن (أ ، ب) = ____
((٠ ، -1) ، (١ ، ١) ، (١ ، ٠) ، (١ ، -1))

(٦) اذا كان $(1+\omega^2)^ن = (1+\omega)^ن$ فإن أقل قيمة لـ ن حيث ن $\in$ ص$^+$ = ____
(٢ ، ٣ ، ٥ ، ٦)

(٧) $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\dots+\omega^{10} = $ ____
(صفر ، ١ ، ω ، $-\omega^2$)

(٨) اذا كان ع = $\omega^ن$ حيث ن $\in$ ص$^+$ فإن |ع| = ____
(١ ، ω ، $-\omega$ ، ω^2)

(٩) $\sum_{ر=1}^{6} (1+\omega)^ر = $ ____
(صفر ، ٦ ، ١ ، $1+\omega$)